

Visualización y teoría APOE en la construcción del grupo cíclico: un estudio de casos

Visualization and APOS theory in the construction of the cyclic group: a case study

Marco Gregorio SOLORZANO-MAMANI¹

Fecha de recepción: 10/11/2025

Fecha de aceptación: 22/03/2026

Fecha de publicación en línea: 15/06/2026

Sección: Artículo original

Cómo citar este artículo: Solorzano Mamani, M. G. (2026). Visualización y teoría APOE en la construcción del grupo cíclico: un estudio de casos. *Journal of Humanities Titicaca*, 5(1), 21-42. <https://doi.org/10.70123/jht.108>

RESUMEN

La enseñanza del álgebra abstracta en pregrado enfrenta dificultades persistentes asociadas a la desconexión entre el formalismo axiomático y la construcción de significados funcionales, especialmente en la comprensión de estructuras como el grupo cíclico y el subgrupo generado. El objetivo del estudio fue caracterizar cómo una estrategia de visualización, basada en diagramas de Cayley y en la representación de giros mediante engranajes físicos, favorece el desarrollo de mecanismos mentales de interiorización, reversión y encapsulación, desde el marco de la teoría APOE. Se empleó un enfoque cualitativo, con diseño de estudio de casos múltiple e instrumental, siguiendo el ciclo de investigación APOE: análisis teórico mediante una Descomposición Genética preliminar, diseño de enseñanza, aplicación de pruebas escritas longitudinales y entrevistas semiestructuradas a dos estudiantes de pregrado. Los resultados evidenciaron trayectorias cognitivas diferenciadas: un participante permaneció principalmente en niveles de Acción, asociado al uso algorítmico de sumas modulares, mientras que el otro mostró tránsito hacia el nivel de Proceso e indicios de Objeto mediante la simulación mental de rotaciones y el empleo de representaciones visuales para organizar ciclos y subgrupos. Se concluye que la visualización funcionó como andamiaje cognitivo para transformar acciones físicas o algorítmicas en procesos mentales más estructurados. Asimismo, la reversión emergió como un indicador relevante de control cognitivo en la deducción de estructuras algebraicas. El estudio aporta indicios de viabilidad de la Descomposición Genética propuesta y ofrece criterios analíticos preliminares para diagnosticar progresiones cognitivas en álgebra abstracta universitaria.

PALABRAS CLAVE: Visualización; álgebra abstracta; teoría APOE; descomposición genética, grupo cíclico.

1 Universidad Nacional del Altiplano de Puno, Perú. Correo electrónico: marcossolorzano@unap.edu.pe (Autor de correspondencia). ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1583-9792>

ABSTRACT

The teaching of abstract algebra at the undergraduate level faces persistent difficulties associated with the disconnect between axiomatic formalism and the construction of functional meanings, particularly in the understanding of structures such as cyclic groups and generated subgroups. The aim of this study was to characterize how a visualization strategy, based on Cayley diagrams and the representation of rotations through physical gears, supports the development of the mental mechanisms of interiorization, reversion, and encapsulation within the framework of APOS theory. A qualitative approach was employed using a multiple and instrumental case study design, following the APOS research cycle: theoretical analysis through a preliminary Genetic Decomposition, instructional design, application of longitudinal written assessments, and semi-structured interviews with two undergraduate students. The results revealed differentiated cognitive trajectories: one participant remained primarily at the Action level, associated with the algorithmic use of modular sums, while the other showed progression toward the Process level and indications of the Object level through the mental simulation of rotations and the use of visual representations to organize cycles and subgroups. It is concluded that visualization functioned as a cognitive scaffold that transformed physical or algorithmic actions into more structured mental processes. Furthermore, reversion emerged as a relevant indicator of cognitive control in the deduction of algebraic structures. The study provides preliminary evidence regarding the viability of the proposed Genetic Decomposition and offers analytical criteria for diagnosing cognitive progression in undergraduate abstract algebra learning.

KEYWORD: Visualization; abstract algebra; APOS theory; genetic decomposition, cyclic group.

I. Introducción

El aprendizaje de las matemáticas en el nivel superior atraviesa un periodo de revisión crítica debido a la persistencia de un rezago académico acumulado que dificulta la interacción de los estudiantes con su entorno profesional (Lopez de los Santos & Bedolla Cornejo, 2020). En el campo del Álgebra Abstracta, este desafío adquiere una dimensión compleja dada la naturaleza intrínsecamente abstracta de sus objetos de estudio, lo que genera brechas profundas en la comprensión conceptual de los estudiantes de pregrado (Muñoz-Orozco et al., 2025). Investigadores como Mena-Lorca et al. (Mena-Lorca y Parraguez, 2016) coinciden en que la enseñanza de estructuras algebraicas no ha sido, históricamente, un esfuerzo exitoso, atribuyéndolo a una desconexión entre el formalismo axiomático y la construcción de significados funcionales (Rodríguez Jara et al., 2019).

Frente a esta problemática, la presente investigación se propone indagar, mediante indicadores de progresión cognitiva definidos en una descomposición genética (DG), de qué manera una estrategia de visualización integral influye en la construcción de los conceptos de grupo y subgrupo generado. Para ello, se emplea el marco de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), centrando el análisis en el desarrollo de mecanismos mentales clave como la interiorización, la reversión y la encapsulación (Muñoz-Orozco et al., 2025; Rodríguez Jara et al., 2019).

Problemas en la enseñanza del álgebra abstracta a nivel pregrado: El conflicto entre formalismo y construcción mental

La enseñanza del álgebra abstracta ha sido tradicionalmente un terreno de tensiones didácticas entre el rigor y la intuición. Autores como Rodríguez et al. (2024)

identifican el *obstáculo del formalismo* como una barrera donde el privilegio de la representación simbólica sobre la visual limita la capacidad del estudiante para formular argumentos matemáticos sólidos. En este punto, existe un diálogo crítico necesario: mientras que la instrucción tradicional asume que el manejo procedimental conduce eventualmente a la abstracción, investigadores bajo el lente de la teoría APOE, como Asiala et al. (1996), sostienen que esta dependencia de *procedimientos canónicos* solo logra que el alumno manipule nociones sin un dominio real de sus fundamentos, quedando atrapado en un nivel de Acción (Rodríguez Jara et al., 2019).

Cognitivamente, el paso del álgebra elemental al álgebra universitaria implica una reestructuración de conceptos como *variable* y *parámetro* que a menudo entran en tensión (Dubinsky y McDonald, 2001). Rodríguez Jara et al. (2019) advierten que, sin una aproximación funcional que medie este tránsito, es poco probable que el estudiante perciba estructuras como los grupos cociente como Objetos matemáticos terminados. Esta discrepancia se agudiza por lo que Trigueros (2005) describe como una tendencia docente a enseñar conceptos aislados, esperando erróneamente que el estudiante establezca conexiones por sí solo (Franco Carzolio et al., 2021). En consecuencia, el problema no radica exclusivamente en la complejidad del contenido, sino en la ausencia de andamiajes que permitan al aprendiz *ver* la estructura que la notación simbólica oculta.

La visualización en matemáticas: Perspectivas entre la imagen mental y la representación externa

Frente al predominio de lo analítico, la visualización emerge como una herramienta pedagógica fundamental que trasciende el acto pasivo de observar (Badía Albanés y Balbuena Cruz, 2022). No obstante, su definición genera debates interesantes en la literatura. Arcavi (2003) la conceptualiza como la habilidad de crear e interpretar representaciones para *ver lo invisible*, actuando como puente entre la abstracción disciplinar y la experiencia concreta. Por otro lado, autores como Badía Albanés y Balbuena Cruz (2022) enfatizan que la visualización debe ser una estrategia mixta y dinámica, advirtiendo que el soporte visual por sí solo no garantiza el aprendizaje si no existe una lectura correcta que fomente la reflexión profunda (González Hernández et al., 2021).

En la teoría de grupos, los diagramas de Cayley destacan como una herramienta potente para representar la estructura de forma fiel, permitiendo visualizar la simetría y las relaciones internas (Carter, 2009). Sin embargo, la innovación de este estudio reside en integrar manipulativos físicos, como tarjetas coloreadas, para dinamizar el concepto. Investigaciones recientes de Guerrido-Tumbaco et al. (2025) y Rivera-Núñez (2025) respaldan que la experiencia tangible no solo reduce la ansiedad matemática, sino que favorece la transición de una imagen estática a una dinámica, potenciando la interiorización de acciones físicas en procesos mentales. Esta sinergia

entre lo material (engranajes) y lo inmaterial (diagramas y mentes) busca suplir el vacío de estrategias multimodales en el nivel de pregrado.

La Teoría APOE como modelo de análisis de la progresión cognitiva

Para comprender cómo un individuo construye el conocimiento matemático avanzado, la teoría APOE proporciona una estructura rigurosa fundamentada en la abstracción reflexiva de Piaget (Muñoz-Orozco et al., 2025; Rodríguez Jara et al., 2019). El núcleo de este marco es la Descomposición Genética, un modelo cognitivo hipotético que describe el camino que un aprendiz sigue para alcanzar la comprensión de un concepto (Lasnibat Godoy et al., 2022; Rodríguez Jara et al., 2019).

Existe un diálogo metodológico relevante respecto a la creación de esta DG. Mientras que algunos autores sugieren basarlas estrictamente en el análisis de libros de texto (Betancur Sánchez et al., 2021), investigadores como Noriega (2020) y Muñoz-Orozco et al. (2025) defienden que la experiencia docente del investigador y el análisis teórico-epistemológico son sustratos legítimos para proponer una DG preliminar. En esta investigación, se sigue la premisa de Duque-Marín et al. (2020) sobre la necesidad de integrar trayectorias plurales, gráficas y analíticas, para fortalecer el modelo cognitivo.

El estudio pone especial énfasis en mecanismos menos explorados en la teoría de grupos, como la reversión. Fuentealba et al. (2023) y Rodríguez et al. (2019) coinciden en que la capacidad de invertir los pasos para formar un proceso (por ejemplo, al generar subgrupos a partir de un grupo) es un indicador de control cognitivo superior, aunque rara vez se promueve intencionalmente en el aula. La meta final es documentar la encapsulación, donde el estudiante deja de ver la operación modular como una secuencia de pasos y comienza a tratar al subgrupo como una entidad estática u Objeto sobre el cual puede realizar nuevas acciones.

Brechas de investigación y justificación del estudio

A pesar de la abundancia de estudios APOE en áreas como el cálculo o el álgebra lineal (Fuentealba et al., 2023; Roa-Fuentes y Oktaç, 2010; Rodríguez et al., 2024), la literatura sobre la enseñanza específica de los grupos cíclicos en pregrado sigue siendo escasa. La mayoría de los textos universitarios relegan la visualización a una función puramente ilustrativa, omitiendo su rol como componente esencial del razonamiento y la prueba (Badía Albanés y Balbuena Cruz, 2022).

Zamorano y Parraguez (2024) sostienen que el pensamiento matemático avanzado se manifiesta cuando el estudiante reorganiza esquemas previos ante situaciones realísticas. Esto justifica el uso de tarjetas colodeadas y engranajes físicos no como un retroceso a lo concreto, sino como una base motriz necesaria para la abstracción reflexiva. Este estudio busca llenar esta brecha al proponer indicadores de progresión cognitiva claros que ayuden a los docentes a diagnosticar y fomentar la transición de sus alumnos hacia niveles superiores de abstracción estructural.

Pregunta de investigación y objetivos

A partir de la problemática y las brechas expuestas, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿De qué manera la estrategia de visualización, sustentada en el uso de diagramas de Cayley y la manipulación de engranajes físicos, influye en el desarrollo de los mecanismos de interiorización, reversión y encapsulación para la construcción de las estructuras de Acción, Proceso y Objeto en los conceptos de grupo cíclico y subgrupo generado en estudiantes de pregrado?

Para responder a esta interrogante, se ha definido el siguiente objetivo del trabajo: Investigar y caracterizar, mediante indicadores de progresión cognitiva definidos en una descomposición genética, de qué manera la estrategia de visualización, sustentada en el uso de diagramas de Cayley y la manipulación de engranajes físicos, influye en el desarrollo de los mecanismos de interiorización, reversión y encapsulación para la construcción de los niveles de Acción, Proceso y Objeto en los conceptos de grupo cíclico y subgrupo generado en estudiantes de pregrado.

II. Metodología

La presente investigación se desarrolló bajo un enfoque cualitativo con un diseño de estudio de casos múltiple e instrumental. Se adoptó como marco metodológico el ciclo de investigación de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), el cual consta de tres componentes interrelacionados: el análisis teórico (donde se propone la descomposición genética), el diseño e implementación de enseñanza, y la recolección y análisis de datos. Este ciclo permitió rastrear de manera longitudinal las construcciones mentales de los estudiantes y considerar la visualización como andamiaje cognitivo.

Análisis teórico

Diagramas de Cayley y grupos cíclicos

Autores como Cayley (2009) definen un *grupo* como un conjunto con una operación binaria que satisface la asociatividad, la existencia de un elemento identidad y la presencia de inversos. En este marco, el *subgrupo generado* $\langle a \rangle$ se conceptualizó como la estructura que contiene al elemento identidad y a los resultados de operar el generador sucesivamente consigo mismo. Para facilitar la comprensión de estas estructuras, se utilizaron los *diagramas de Cayley*, definidos como representaciones gráficas compuestas por nodos (vértices que representan los elementos) y aristas (que representan la acción de los generadores), permitiendo visualizar la simetría y la recurrencia del grupo.

Teoría APOE

El análisis se fundamentó en las construcciones mentales de la teoría APOE. Según Noriega (2020), la *Acción* se identifica cuando el estudiante manipula elementos de

forma algorítmica o física; el *Proceso*, cuando mediante la interiorización puede reflexionar sobre la operación sin realizarla físicamente. El *Objeto* se alcanza al *encapsular* el proceso en una entidad estática sobre la cual se aplicaron nuevas acciones. Además, la *reversión*, es la capacidad de volver sobre los pasos de una transformación interiorizada para formar un nuevo proceso, y la *desencapsulación*, proceso opuesto a la encapsulación, es necesaria para operar con objetos dentro de esquemas más complejos.

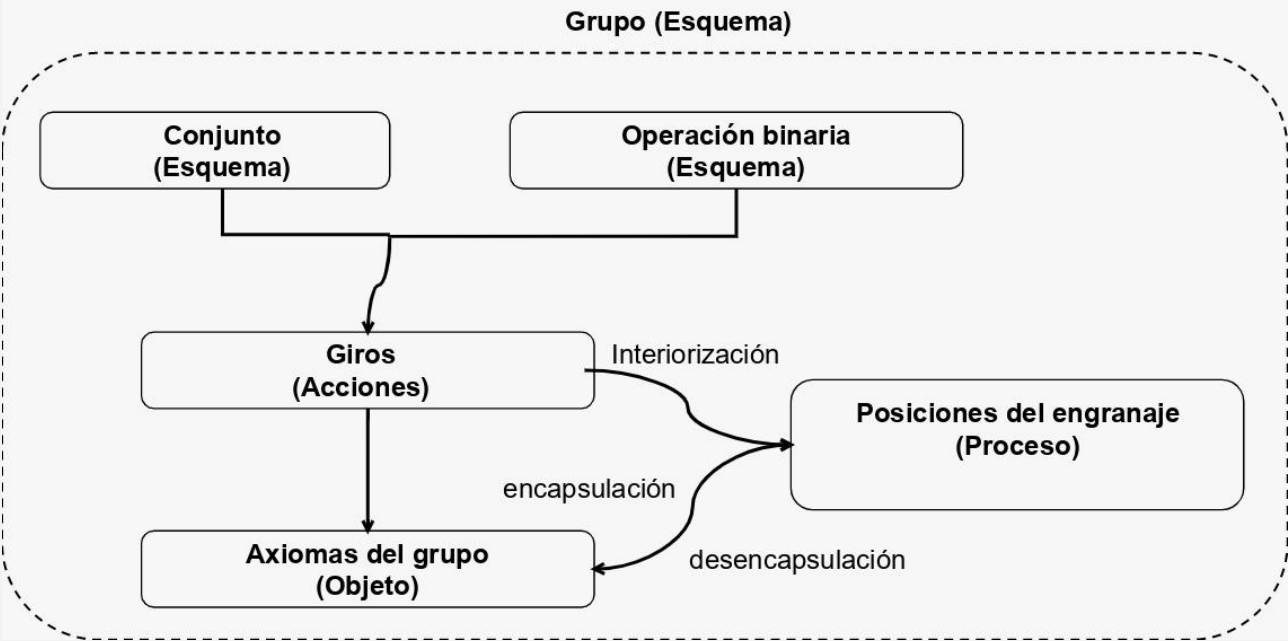
Descomposición genética (DG)

Para modelar la progresión cognitiva de los estudiantes, se propuso una descomposición genética preliminar que actuó como el mapa cognitivo de la investigación. Dado que la literatura sobre la enseñanza del álgebra abstracta es escasa en comparación con otras áreas y no se identificaron antecedentes bibliográficos específicos que integraran el uso de manipulativos físicos y diagramas de Cayley para estos conceptos, la DG fue elaborada con base en la experiencia docente del investigador y su comprensión de la teoría APOE. Esta decisión se sustentó en el marco teórico de la propia teoría, el cual establece que no existe una única DG para un concepto matemático y que el análisis teórico inicial puede fundamentarse legítimamente en la trayectoria pedagógica y el conocimiento matemático del autor (Arnon et al., 2014; Mena-Lorca y Parraguez, 2016; Noriega, 2020).

La propuesta teórica articuló para el esquema de grupo la transición desde las Acciones de giros físicos hacia el Proceso de posiciones (de tarjetas coloreadas o del engranaje) mediante el mecanismo de interiorización, culminando en la encapsulación de los axiomas de grupo como Objeto. Asimismo, para el esquema de subgrupo generado, se planteó que la operación sucesiva de elementos (Acción) se interioriza a través de la visualización en diagramas de Cayley (Proceso-visual), permitiendo la encapsulación del generador en una totalidad estática u Objeto «a». Este modelo hipotético permitió orientar el diseño de los instrumentos y sirvió como lente para interpretar de manera longitudinal las construcciones mentales de los participantes (Arnon et al., 2014).

La Figura 1 ilustra la descomposición genética diseñada para el constructo mental del esquema grupo, actuando como el mapa cognitivo que guía la progresión del aprendizaje. En este modelo, los esquemas de conjunto y operación binaria se presentan como requisitos previos que se coordinan para dar inicio a las Acciones de giros o rotaciones. Estas acciones físicas o algorítmicas, mediante el mecanismo de interiorización, se transforman en el Proceso de posiciones de tarjetas coloreadas o del engranaje, lo que permite al estudiante reflexionar sobre los movimientos y predecir resultados sin depender de la manipulación externa.

Figura 1
Descomposición genética para el constructo mental esquema grupo



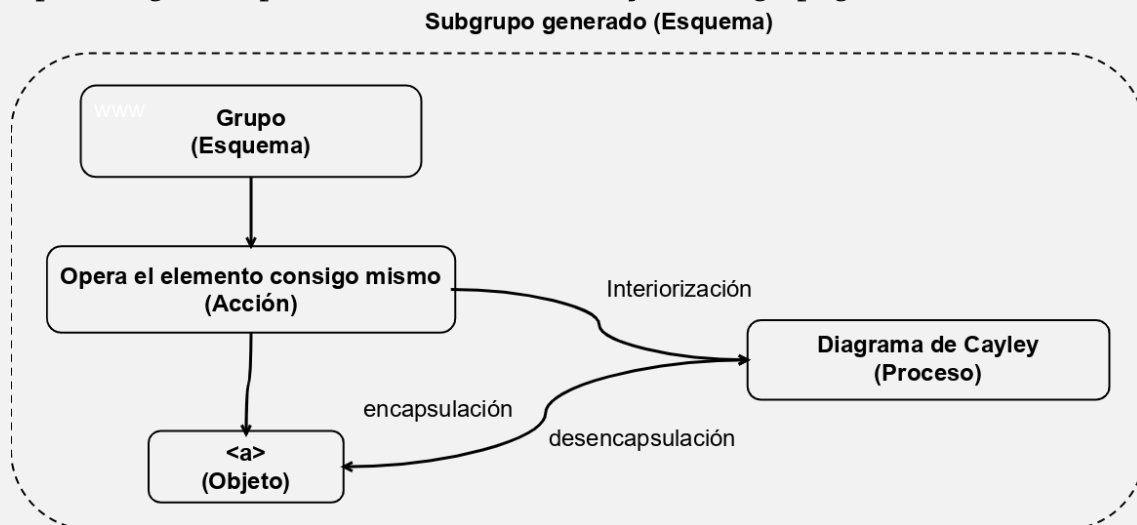
Nota: Elaboración propia basada en los indicadores de progresión cognitiva de la teoría APOE.

La conexión bidireccional entre este proceso y el Objeto de los axiomas del grupo representa los mecanismos de encapsulación y desencapsulación; el primero ocurre cuando el estudiante percibe la estructura dinámica de giros como una entidad estática (un grupo), mientras que el segundo permite descomponer dicho objeto para operar con sus procesos subyacentes en contextos de mayor complejidad. Finalmente, se establece un vínculo directo entre la acción de giro y el objeto axiomas de grupo, lo que evidencia la capacidad del sujeto para relacionar los movimientos mecánicos con propiedades algebraicas fundamentales como la identidad, el inverso y la cerradura.

La Figura 2 ilustra la descomposición genética para el constructo mental del esquema subgrupo generado, la cual sirve como modelo de las construcciones y mecanismos mentales necesarios para el aprendizaje de este concepto. En esta estructura, el esquema de grupo se establece como el concepto prerequisite fundamental que se enlaza con las Acciones de operar el elemento consigo mismo repetidamente. A través del mecanismo de interiorización, estas acciones físicas o algorítmicas se transforman en el Proceso mental representado por el diagrama de Cayley, el cual permite al estudiante visualizar la generación de elementos de forma dinámica y ordenada.

Figura 2

Descomposición genética para el constructo mental esquema subgrupo generado



Nota: Elaboración propia basada en los indicadores de progresión cognitiva de la teoría APOE.

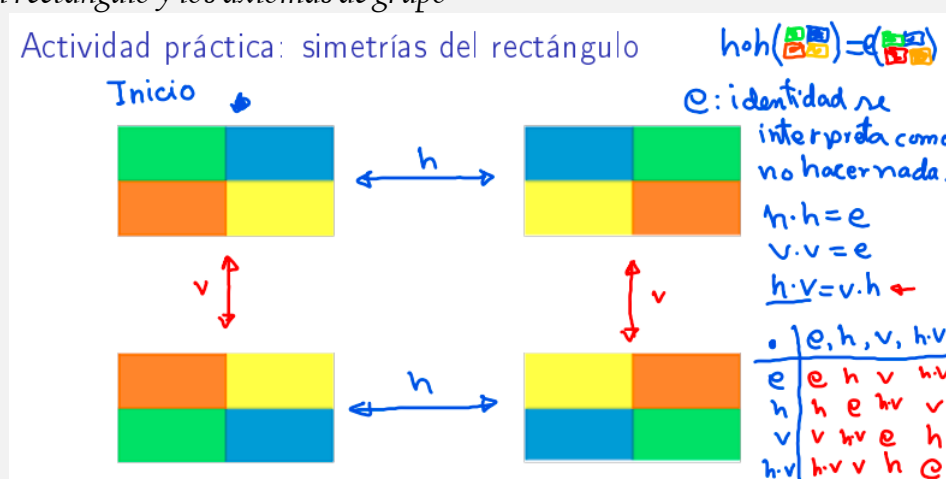
La conexión bidireccional entre el proceso (diagrama de Cayley) y el Objeto $\langle a \rangle$ representa los mecanismos de encapsulación y desencapsulación; el primero ocurre cuando el individuo logra ver la generación total como una entidad estática y terminada, mientras que el segundo le permite regresar al proceso para manipular sus componentes internos. Finalmente, la trayectoria que conecta directamente la acción de operar consigo mismo con el objeto $\langle a \rangle$ evidencia la capacidad del estudiante para reconocer la estructura del subgrupo generado a partir de la reflexión sobre acciones específicas, consolidando así su comprensión conceptual.

Diseño e implementación de enseñanza

La estrategia de enseñanza se centró en la visualización como puente entre lo concreto y lo abstracto. Se diseñaron sesiones donde los estudiantes manipularon tarjetas coloreadas (mostrada en la Figura 3) para explorar las simetrías del rectángulo obtenidas por medio de giros y relacionarlas con los axiomas de grupo mediante rotaciones de giros horizontales (h) y giros verticales (v). Complementariamente, se introdujeron los diagramas de Cayley para organizar la generación de elementos en grupos como $\mathbb{Z}_3$ y S_3 .

Figura 3

Simetrías del rectángulo y los axiomas de grupo



Nota: Elaboración basada en el rectángulo de esquinas enumeradas (Carter, 2009, p. 14).

La selección intencional de los dos participantes (Mati y Eder) se fundamentó en su condición de estudiantes que cursaban la asignatura de Álgebra II por primera vez, criterio esencial para capturar la génesis de las construcciones mentales sin la interferencia de esquemas previamente consolidados. Esta elección permitió alcanzar una rica heterogeneidad analítica y observar la variabilidad en los mecanismos de cognición, facilitando la identificación de una gama diversa de niveles APOE en respuesta a la estrategia de visualización integral.

En cuanto a la saturación de datos, se considera que la profundidad alcanzada en las entrevistas semiestructuradas y la recurrencia de indicadores de logro en los protocolos escritos de los dos casos de estudio permitieron alcanzar una saturación teórica suficiente que permite caracterizar preliminarmente las trayectorias previstas en la Descomposición Genética propuesta. La marcada heterogeneidad analítica entre la persistencia en el nivel de Acción de Eder y la transición hacia el nivel de Objeto de Mati proporcionó la variabilidad necesaria para caracterizar exhaustivamente los mecanismos de interiorización y reversión en el contexto de los grupos cíclicos. De este modo, la evidencia recolectada permitió agotar la emergencia de nuevas categorías conceptuales dentro del entorno controlado del estudio, asegurando que los hallazgos fueran consistentes y suficientes para responder a la pregunta de investigación a pesar del tamaño reducido de la muestra.

Recolección y análisis de datos

La recolección de evidencia se realizó mediante dos instrumentos principales:

1. **Pruebas escritas longitudinales:** Se insertaron tres reactivos estratégicos en las prácticas calificadas. La Pregunta 1 evaluó la transición de la suma modular al Objeto subgrupo; la Pregunta 2 indagó sobre el mecanismo de reversión en grupos cociente usando diagramas; y la Pregunta 3 analizó la conexión entre la manipulación del engranaje y la abstracción de axiomas.

2. **Entrevistas semiestructuradas:** Se realizaron entrevistas post-evaluación para confirmar si los procesos resolutivos correspondían a las construcciones mentales previstas. Las preguntas buscaron indagar el *porqué* del uso de diagramas y la percepción de las acciones físicas.

Tabla 1

Enunciados de las pruebas escritas y su intencionalidad

Enunciado	Prueba escrita en la que se evaluó
Pregunta 1: Para el grupo Z_6 determine los elementos que generan al grupo y halle todos los subgrupos.	Práctica calificada 1.
Pregunta 2: Encuentre el orden del elemento $5 + \langle 4 \rangle$ en el grupo cociente $Z_{12}/\langle 4 \rangle$.	Práctica calificada 3.
Pregunta 3: Considere un engranaje de 8 dientes. Si suponemos que al rotar un ángulo $\pi/4$ rad en sentido horario, la silueta del engranaje queda intacto. Interprete: (a) la operación $\pi/4 + 5\pi/4$, (b) el elemento identidad y el inverso.	Práctica calificada 4.

Nota: Elaboración propia basada en las Prácticas Calificadas 1, 3 y 4 (2025).

Para mitigar el sesgo de confirmación de hipótesis en la fase interpretativa, atendiendo a la dualidad del rol docente investigador, se implementó una triangulación metodológica sistemática que contrastó de manera longitudinal las evidencias de las pruebas escritas con los testimonios de las entrevistas semiestructuradas. Asimismo, la asignación de cada nivel cognitivo (acción, proceso, objeto) se rigió estrictamente por los criterios de decisión explícitos detallados en las rúbricas de evaluación (Tablas 2, 3 y 4), lo que aseguró que la categorización de los hallazgos se sustentara en indicadores de logro observables y en la estructura de la descomposición genética propuesta, reduciendo la subjetividad y garantizando la trazabilidad y el rigor del análisis cualitativo.

Tabla 2

Rúbrica para la pregunta 1 que evalúa la transición de la suma modular (Acción) hacia la identificación de estructuras (Proceso/Objeto)

Nivel APOE	Criterio de Evaluación	Indicadores de Logro
Acción	Realización de operaciones algorítmicas básicas.	El estudiante realiza sumas sucesivas de elementos individuales para hallar resultados aislados sin identificar ciclos completos.
Proceso	Interiorización de la operación modular.	Identifica el ciclo generado por cada elemento (por ejemplo, $\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4\}$) y reconoce cuándo los resultados comienzan a repetirse de forma ordenada.
Objeto	Encapsulación del concepto de subgrupo.	Determina con precisión todos los subgrupos de y distingue cuáles elementos actúan como generadores del grupo total, tratando al subgrupo como una entidad completa.

Nota: Elaboración propia basada (2025).

Tabla 3
Rúbrica para la pregunta 2 que evalúa la capacidad de aplicar procesos previamente interiorizados en estructuras más complejas (Reversión y Esquema)

Nivel APOE	Criterio de Evaluación	Indicadores de Logro
Acción	Manipulación de elementos del cociente.	Intenta sumar el elemento de la clase lateral sin comprender la estructura del subgrupo normal <4>.
Proceso (Reversión)	Uso de representaciones visuales para el ordenamiento.	Emplea un diagrama de Cayley o esquemas visuales para visualizar la repetición de elementos y calcular el orden de la clase lateral de forma sistemática.
Objeto	Desencapsulación y aplicación.	El estudiante ve el proceso de generación como un objeto que puede insertar en el nuevo esquema de grupos cocientes para resolver problemas de mayor abstracción.

Nota: Elaboración propia basada (2025).

Tabla 4
Rúbrica para la pregunta 3 que evalúa la conexión entre la manipulación física y la abstracción de propiedades algebraicas

Nivel APOE	Criterio de Evaluación	Indicadores de Logro
Acción	Manipulación física del objeto (engranaje).	Relaciona los giros de $\pi/4$ rad con movimientos físicos, pero tiene dificultades para traducir el "diente" a un valor matemático preciso.
Proceso	Interiorización de propiedades abstractas.	Conecta la combinación de giros con la cerradura y asocia la ausencia de movimiento con la identidad, y el giro complementario con el inverso.
Esquema	Integración con aplicaciones prácticas.	Vincula la estructura de grupo con conceptos de física, como velocidades angulares y modelado de transmisiones, evidenciando una comprensión integral.

Nota: Elaboración propia basada (2025).

La validación de las rúbricas presentadas en las Tablas 2, 3 y 4 se fundamentó en un proceso de consistencia teórica y pilotaje instrumental, sustentado en la trayectoria pedagógica del investigador y en el análisis de las definiciones de Acción, Proceso, Objeto y Esquema presentes en la literatura especializada; estas tablas constituyen la matriz categorial a priori del estudio. Dado que la descomposición genética preliminar fue diseñada a partir de la experiencia directa del docente ante la escasez de antecedentes bibliográficos específicos, los indicadores de logro se construyeron como criterios de decisión explícitos para categorizar de manera unívoca las construcciones mentales de los participantes. Para otorgar validez de constructo y contenido a los instrumentos de recolección, se llevó a cabo un pilotaje con estudiantes con características similares a los sujetos de estudio, lo que permitió refinar la sensibilidad de los descriptores cualitativos y asegurar que la asignación de cada nivel APOE fuera objetiva y trazable. Este procedimiento permite que la categorización de las evidencias textuales fuera estrictamente coherente con el modelo cognitivo propuesto, mitigando la ausencia de una revisión externa de especialistas mediante la aplicación sistemática y documentada de los indicadores de progresión de la teoría APOE.

El tratamiento de los datos siguió un procedimiento técnico de análisis de contenido cualitativo estructurado en dos etapas fundamentales para garantizar la trazabilidad del hallazgo. En la fase de codificación abierta, se examinaron las transcripciones de las entrevistas y los protocolos de las pruebas escritas para identificar unidades de significado asociadas a la manipulación de elementos y la interpretación de símbolos. Durante la fase de codificación axial, estas unidades se contrastaron con los mecanismos de interiorización, reversión y encapsulación descritos en la Descomposición Genética preliminar, utilizando la matriz categorial detallada en las rúbricas de evaluación (ver Tablas 2, 3 y 4) como sistema de criterios de decisión explícitos para la asignación de niveles APOE. Para asegurar la confiabilidad y validez de constructo, se aplicó un proceso de consistencia teórica mediante el cual cada evidencia textual fue triangulada sistemáticamente entre la producción escrita y el testimonio oral, permitiendo que la interpretación de los episodios resolutivos fuera estrictamente coherente con el modelo cognitivo propuesto y minimizando el sesgo del investigador.

III. Resultados

En esta sección se describieron los hallazgos obtenidos tras la aplicación de las pruebas escritas y entrevistas semiestructuradas a los participantes Mati y Eder. El análisis se centró en seis episodios resolutivos principales, categorizados según los indicadores de la Descomposición Genética propuesta. Se cuantificaron 2 episodios en nivel de Acción, 3 en nivel de Proceso y 1 con indicios de nivel Objeto, basados en la frecuencia de los mecanismos de interiorización y reversión detectados. Cabe destacar que, durante la resolución, los sujetos no interactuaron con objetos materiales, sino que imaginaron el comportamiento dinámico de los engranajes y diagramas para anticipar resultados.

Trayectorias de construcción en grupos cíclicos y subgrupos generados

En la resolución de la Pregunta 1, referida al grupo Z_6 , se registraron niveles diferenciados de progresión cognitiva entre los sujetos. El estudiante Eder exhibió indicadores de una estructura de Acción, al realizar sumas repetitivas de forma exhaustiva para los elementos 1, 5, 2, 3 y 4, identificando correctamente que $\langle 1 \rangle = \langle 5 \rangle = Z_6$, $\langle 2 \rangle = \langle 4 \rangle = \{0, 2, 4\}$, $\langle 3 \rangle = \{0, 3\}$ y $\langle 0 \rangle = \{0\}$. Como se observa en la Figura 4, su razonamiento se organizó mediante el registro de operaciones individuales para cada caso sin una generalización del ciclo antes de la operación física de escritura.

Por el contrario, el estudiante Mati evidenció una transición hacia el nivel de Proceso. En la Figura 5, se observa un listado de conjuntos cíclicos $\langle 1 \rangle$, $\langle 2 \rangle$, $\langle 3 \rangle$, $\langle 4 \rangle$ y $\langle 5 \rangle$ que, según su testimonio en la entrevista, fue resultado de la suma modular sucesiva hasta que los resultados *retornaban al elemento neutro* (0) o *comenzaban a repetirse*. Esta transición se documentó cuando Mati logró diferenciar elementos que generaban el grupo total de

aquellos que generaban subconjuntos propios, basándose en la reflexión sobre la finalización de los ciclos.

Figura 4

Resolución de la pregunta 1 realizada por Eder

(2. b) Para 1 $(\mathbb{Z}_6, \oplus) = \langle 1 \rangle$. Para 5 $(\mathbb{Z}_6, \oplus) = \langle 5 \rangle$

1 = 1
1 + 1 = 2
1 + 1 + 1 = 3
1 + 1 + 1 + 1 = 4
1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 0

$\Rightarrow \langle 1 \rangle$ y $\langle 5 \rangle$ generan $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$

5 = 5
5 + 5 = 4
5 + 5 + 5 = 3
5 + 5 + 5 + 5 = 2
5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 1
5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 0

(2. c) Para 2 $(\mathbb{Z}_6, \oplus) = \langle 1 \rangle, \langle 5 \rangle$
2 = 2
2 + 1 = 4
2 + 2 = 0
2 + 2 + 2 = 2
2 + 2 + 2 + 2 = 4

Para 3 $(\mathbb{Z}_6, \oplus) = \langle 1 \rangle, \langle 5 \rangle$
3 = 3
3 + 3 = 0
3 + 3 + 3 = 3

Para 4 $(\mathbb{Z}_6, \oplus) = \langle 1 \rangle, \langle 5 \rangle$
4 = 4
4 + 4 = 2
4 + 4 + 4 = 0
4 + 4 + 4 + 4 = 4

$\{0, 2, 4\} = \langle 2 \rangle, \langle 4 \rangle$
 $\{0, 3\} = \langle 3 \rangle$
 $\{0, 4\} = \langle 0 \rangle$

$(\mathbb{Z}_6, \oplus)$
 $\{0, 2, 4\}$ | $\{0, 3\}$
 $\{0, 4\}$

Nota: Extracto de la práctica calificada 1 del curso de Álgebra II de Eder (2025).

Figura 5

Resolución de la pregunta 1 realizada por Mati

10 genera $\langle 1 \rangle$ y $\langle 5 \rangle$

$\langle 0 \rangle = \{0\}$
 $\langle 1 \rangle = \{1, 2, 3, 4, 5, 0\} = \mathbb{Z}_6$
 $\langle 2 \rangle = \{2, 4, 0\}$
 $\langle 3 \rangle = \{3, 0\}$
 $\langle 4 \rangle = \{4, 0, 2\}$
 $\langle 5 \rangle = \{5, 1, 3, 2, 1, 0\} = \mathbb{Z}_6$

$\bullet \{0\}$
 $\bullet \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
 $\bullet \{2, 4, 0\}$
 $\bullet \{3, 0\}$

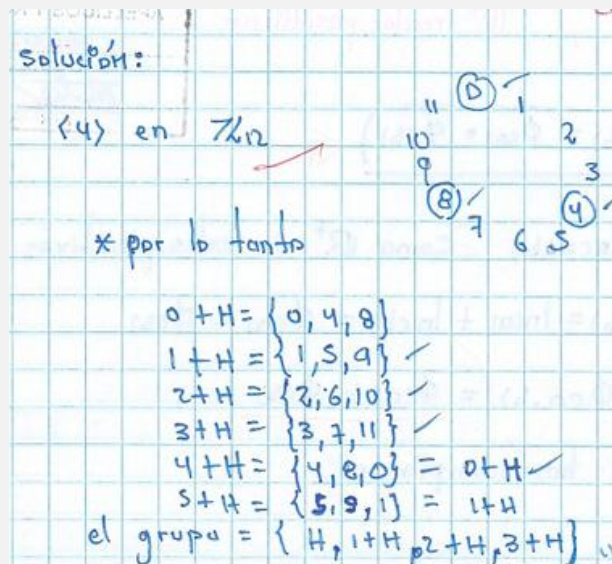
Nota: Extracto de la práctica calificada 1 del curso de Álgebra II de Mati (2025).

Uso de diagramas de Cayley y mecanismo de reversión en estructuras complejas

Para el cálculo del orden del elemento $5 + \langle 4 \rangle$ en el grupo cociente $\mathbb{Z}_{12}/\langle 4 \rangle$ (Pregunta 2), se registró el empleo de representaciones gráficas como apoyo cognitivo. El estudiante Mati utilizó un diagrama de Cayley para delimitar el subgrupo $\langle 4 \rangle$ mediante círculos (Figura 6), tratándolo como unidad base para determinar la clase lateral. Durante la entrevista, el sujeto manifestó que el diagrama ayudó en *ver de forma ordenada cómo se generan los elementos* antes del cálculo aritmético, lo que se categorizó como nivel de Proceso con indicios de encapsulación. También se identificó un episodio de reversión; el estudiante revirtió desde el algoritmo aritmético hacia la representación visual del diagrama para reorganizar la estructura mental.

Figura 6

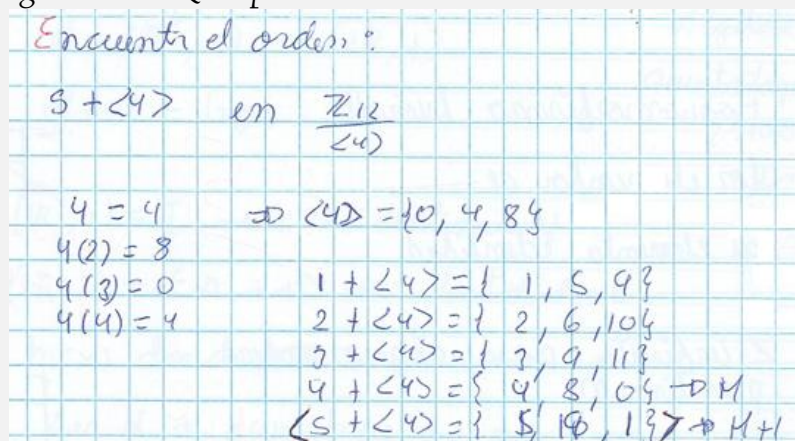
Resolución de la pregunta 2 realizada por Mati



Nota: Extracto de la práctica calificada 3 del curso de Álgebra II de Mati (2025).

Figura 7

Resolución de la pregunta 2 realizada por Eder



Nota: Extracto de la práctica calificada 3 del curso de Álgebra II de Eder (2025).

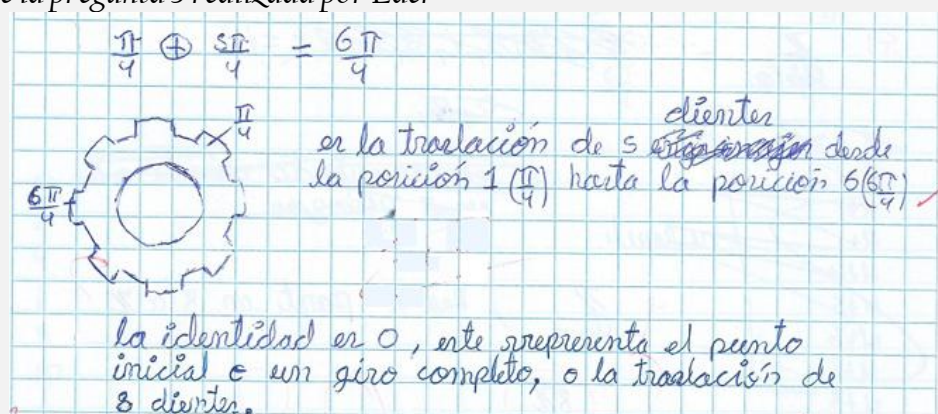
Eder, en este mismo reactivo (Figura 7), prescindió de representaciones visuales y optó por un desarrollo analítico basado en multiplicaciones modulares sucesivas (4×1 , 4×2 , 4×3 , 4×4) para hallar los elementos de la clase lateral. Esta persistencia en el método algorítmico, en contraste con el uso de estructuras visuales de Mati, marcó una trayectoria donde la abstracción se mantuvo ligada a la Acción operativa sobre los elementos del conjunto.

Visualización y axiomas de grupo mediante la imaginación del engranaje

En la Pregunta 3, los estudiantes trabajaron sobre el comportamiento de un engranaje de 8 dientes. Eder utilizó el apoyo gráfico para marcar posiciones espaciales de los *dientes* y simuló mentalmente la ubicación final tras las rotaciones. Definió la identidad como una *vuelta completa* (2π) e indicó que el cálculo previo le sirvió para *anticiparse al resultado solo con el cálculo*, sin necesidad de un movimiento físico real.

Figura 8

Resolución de la pregunta 3 realizada por Eder



Nota: Extracto de la práctica calificada 4 del curso de Álgebra II de Eder (2025).

Figura 9

Resolución de la pregunta 3 realizada por Mati

b) $\frac{\pi}{4} \oplus \frac{5\pi}{4} = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$

* al tener el engranaje en el punto inicial 0 o $\frac{8\pi}{4}$ (e)
y operamos (girar) $\frac{\pi}{4}$ (45°), luego más $\frac{5\pi}{4}$ (225°) nos dará
 $\frac{6\pi}{4}$ (270°):

c) * el elemento identidad (e) es cuando el engranaje está en su punto inicial que es $0 \cong \frac{8\pi}{4}$.

* elemento inverso:

Sea a elemento que pertenece al grupo G
a' es elemento inverso que al operar no

$$a \oplus a^{-1} = e$$

ejemplos:

$\rightarrow a = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a^{-1} = \frac{7\pi}{4}$, porque $\frac{\pi}{4} \oplus \frac{7\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} \cong 0$

$\rightarrow a = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow a^{-1} = \frac{5\pi}{4}$, porque $\frac{3\pi}{4} \oplus \frac{5\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} \cong 0$

Nota: Extracto de la práctica calificada 4 del curso de Álgebra II de Mati (2025).

Mati representó la operación de giros mediante la expresión algebraica $\pi/4 + 5\pi/4 = 6\pi/4$. En su testimonio, fue explícito sobre el mecanismo mental: *Imaginé los giros del engranaje y sumé los ángulos para ver a qué posición llegaba*. Definió formalmente el inverso ($-a$) como el giro necesario para satisfacer $a + (-a) = e$, validando la construcción del nivel de Objeto al tratar los movimientos como elementos de una estructura con propiedades algebraicas definidas (identidad, inverso y cerradura).

Sistematización de evidencias y matriz analítica

A continuación, se presenta la matriz que vincula las evidencias textuales con los niveles cognitivos de la teoría APOE, conforme a los criterios de las rúbricas validadas.

Tabla 5

Matriz analítica de construcciones mentales detectadas

Evidencia Textual (Cita / Observación)	Indicador de Rúbrica	Nivel APOE	Interpretación Teórica
Eder: "4(1) = 4, 4(2) = 8... hasta llegar al 0".	Sumas sucesivas para resultados aislados.	Acción	Dependencia del algoritmo para identificar el ciclo.
Mati: "Fui sumando... hasta que se repitió el conjunto".	Identifica el ciclo generado y la repetición ordenada.	Proceso	Interiorización de la operación modular.
Mati: "Imaginé los giros... y sumé los ángulos".	Anticipa resultados mediante reflexión mental del objeto.	Proceso	Transición de la acción motriz a la imagen dinámica.

Evidencia Textual (Cita / Observación)	Indicador de Rúbrica	Nivel APOE	Interpretación Teórica
Mati: (Encierra en círculos el subgrupo $\langle 4 \rangle$).	Trata al subgrupo como una entidad completa y estática.	Objeto	Encapsulación de la generación en una unidad base.
Eder: “Uso los dientes para dar una ubicación a cada valor”.	Vincula la estructura con aplicaciones espaciales.	Esquema	Integración del concepto con modelos de transmisión.

Nota: Elaboración propia basada en los datos de las prácticas calificadas 1, 3 y 4 (2025).

En resumen, los resultados muestran que mientras Eder operó mayoritariamente en niveles de Acción y Proceso, Mati integró la visualización imaginada para transitar hacia el nivel de Objeto, especialmente al resolver estructuras de grupos cocientes y axiomas mediante la simulación mental de rotaciones. La tabla 5 (Matriz Analítica) es el resultado directo de aplicar las rúbricas de las tablas 2, 3 y 4.

IV. Discusión

Los hallazgos de esta investigación sugieren que la integración de una estrategia de visualización, que combina diagramas de Cayley y la manipulación imaginada de engranajes, proporcionó un andamiaje que facilitó el tránsito entre las diferentes estructuras mentales de la teoría APOE. Se observó que la capacidad de los participantes para transitar desde la Acción algorítmica hacia el Proceso mental dependió estrechamente del mecanismo de interiorización, donde Mati logró coordinar los procesos mentales involucrados, lo que le permitió proyectar mentalmente las relaciones estructurales del concepto sin depender de un referente externo paso a paso.

La condición crítica identificada en este estudio, que representa una cuestión teórica fundamental en la enseñanza del álgebra abstracta, es el denominado *obstáculo del formalismo*. Los resultados muestran una tensión persistente entre el manejo procedimental y la construcción de significados funcionales. Mientras que Eder mostró una dependencia del algoritmo de sumas sucesivas, característico de una estructura de Acción, Mati logró ver la operación como un todo dinámico. Esta divergencia sugiere que el problema didáctico no reside únicamente en la abstracción del contenido, sino en la ausencia de mecanismos que medien la transición desde el álgebra elemental hacia el álgebra estructural.

Un aspecto central de esta progresión es el mecanismo de reversión, el cual se considera un indicador de control cognitivo superior. La literatura señala que la capacidad de invertir los pasos de una transformación interiorizada permite al estudiante, por ejemplo, deducir generadores a partir de la estructura de un subgrupo. Aunque los resultados mostraron indicios de encapsulación en Mati al tratar al subgrupo como una entidad estática, la reversión es el proceso que permitiría a los

estudiantes no solo operar hacia adelante en la generación de elementos, sino comprender la estructura bidireccional de los grupos cíclicos, facilitando construcciones más complejas como los grupos cociente.

Si bien Mati exhibió indicios de nivel Objeto, esta construcción podría estar fuertemente ligada al contexto específico de los engranajes y no necesariamente representar una encapsulación generalizable a otros grupos no cíclicos o estructuras más abstractas. Asimismo, el desempeño de Eder en nivel de Acción no debe interpretarse como un fracaso cognitivo, sino posiblemente como un estado de transición necesario donde el estudiante requiere consolidar el esquema de operación binaria antes de interiorizarlo en un proceso mental.

Limitaciones Metodológicas

Es imperativo precisar que el análisis cualitativo de la presente investigación presenta limitaciones técnicas que deben ser consideradas al interpretar los hallazgos. En primer lugar, la categorización de los estudiantes en los niveles de Acción, Proceso, Objeto o Esquema se rigió por los criterios de decisión explícitos para cada una de estas estructuras y mecanismos mentales, detallados en el presente documento. Finalmente, se debe explicitar que no hubo una revisión externa, contraste entre evaluadores independientes ni un control formal de consistencia analítica, recayendo la validez de las interpretaciones exclusivamente en el criterio del autor. Estas omisiones metodológicas limitan la trazabilidad técnica del análisis y la posibilidad de replicar el procedimiento de categorización bajo los mismos estándares cualitativos.

Asimismo, dada la naturaleza cualitativa de este estudio de caso múltiple, los resultados no pretenden ser generalizables a toda la población estudiantil. La investigación se limitó a caracterizar la progresión cognitiva dentro de un entorno controlado y con una muestra pequeña. Entre las limitaciones propias del estudio se encuentra el sesgo potencial derivado del rol dual del docente como investigador, aunque se aplicó una triangulación para mitigar este efecto. Además, la Descomposición Genética propuesta es un modelo hipotético que, de acuerdo con la metodología APOE, requiere de ciclos adicionales de observación y análisis para ser validado o refinado por la comunidad académica.

V. Conclusiones

La investigación permitió caracterizar, desde la teoría APOE, la progresión cognitiva de dos estudiantes de pregrado en la construcción de los conceptos de grupo cíclico y subgrupo generado. Los hallazgos muestran que la estrategia de visualización, sustentada en diagramas de Cayley y en la representación mental de giros mediante engranajes físicos, funcionó como un andamiaje cognitivo para organizar ciclos, anticipar resultados y relacionar operaciones algebraicas con representaciones dinámicas. En este sentido, la Descomposición Genética propuesta ofrece indicios de

viabilidad como herramienta analítica preliminar para interpretar el tránsito desde acciones algorítmicas hacia procesos mentales más estructurados.

Los resultados evidenciaron trayectorias diferenciadas entre los participantes. Mientras uno permaneció principalmente en un nivel de Acción, asociado al uso secuencial de sumas modulares, el otro mostró avances hacia el nivel de Proceso e indicios de Objeto al utilizar representaciones visuales para organizar la generación de elementos y tratar ciertos ciclos como unidades estructurales. Este contraste permite sostener que la interiorización y la reversión constituyen mecanismos relevantes para comprender cómo los estudiantes reorganizan sus procedimientos cuando enfrentan estructuras algebraicas de mayor abstracción, especialmente en el trabajo con subgrupos y grupos cocientes.

No obstante, los hallazgos deben interpretarse con cautela debido al tamaño reducido de la muestra, la ausencia de un diseño comparativo y la falta de contratación externa de la codificación. Por ello, no corresponde generalizar la efectividad de la estrategia ni validar de manera definitiva la Descomposición Genética propuesta. El aporte del estudio radica en ofrecer evidencia cualitativa preliminar, categorías analíticas observables y criterios iniciales para diagnosticar progresiones cognitivas en álgebra abstracta universitaria, los cuales deberán ser refinados en futuros ciclos de investigación con muestras más amplias, revisión interevaluador y aplicación en otros contextos algebraicos.

Declaración sobre el uso de Inteligencia Artificial y Responsabilidad de Autoría

El autor declara haber utilizado herramientas de Inteligencia Artificial (NotebookLM) exclusivamente para la optimización del estilo acorde a la revista y la corrección gramatical de algunas secciones del manuscrito. Siguiendo las directrices del COPE, el autor aclara que la IA no cumple con los requisitos para ser considerada autor ni coautor de este trabajo. El autor asume la total responsabilidad por el contenido final, garantizando la integridad, veracidad de los datos y la coherencia de las interpretaciones presentadas, asegurando que el uso de estas herramientas no ha sustituido el juicio crítico del investigador.

VI. Referencias bibliográficas

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241. <https://doi.org/10.1023/A:1024312321077>
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. *Springer*. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6>

- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 6, 1-32.
- Badía Albanés, V., & Balbuena Cruz, D. (2022). El papel de la visualización en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Análisis Matemático. *Alternativas*, 23(2), 5-10. <https://doi.org/10.23878/alternativas.v23i2.403>
- Betancur Sánchez, A., Roa Fuentes, S., & Ballesteros, S. J. (2021). Una descomposición genética preliminar del concepto de eigenvalor y eigenvector: El análisis de libros de texto como sustrato en la construcción de modelos cognitivos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 24(3), 245-276. <https://doi.org/10.12802/relime.21.2431>
- Carter, N. C. (2009). *Visual Group Theory*. Mathematical Association of America.
- Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. En *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Vol. 7, pp. 275-282). Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7>
- Duque-Marín, E., Ramírez-Carrasco, C., & Altamirano-Espinoza, M. (2020). Construction of a genetic decomposition: theoretical analysis of the concept of the value theorem medium. *Journal of Physics: Conference Series*, 1702(2020). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1702/1/012025>
- Franco Carzolio, G. D., Olave Baggi, M. I., Rosas Mendoza, A. M., Franco Carzolio, G. D., Olave Baggi, M. I., & Rosas Mendoza, A. M. (2021). La descomposición genética como marco de referencia para el análisis a priori de actividades. *Educación matemática*, 33(3), 39-66. <https://doi.org/10.24844/em3303.02>
- Fuentealba, C. E., Cárcamo, A. D., Badillo, E. R., & Sánchez-Matamoros, G. M. (2023). Análisis de errores de tareas sobre el concepto de derivada: una mirada desde la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema). *Formación Universitaria*, 16(3), 41-50. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062023000300041>
- Funes, O. E. (2022). La Visualización como estrategia de aprendizaje en una clase de algebra bajo pandemia. *Revista Electrónica de Divulgación de Metodologías emergentes en el desarrollo de las STEM*, 4(2), 70-88. Recuperado a partir de <https://www.revistas.unp.edu.ar/index.php/rediunp/article/view/858>
- González Hernández, N., Garcés Cecilio, W., & Grimaldy Romay, L. N. (2021). LA VISUALIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA. SU EMPLEO MEDIANTE EL USO DEL GEOGEBRA: EMPLEO DE LA VISUALIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA. *Didáctica y Educación*, 12(4), 130-140.
- Guerrido-Tumbaco, M. Á., Baque-Parrales, E. M., Vera-Pisco, D., & Quishpi-Vera, H. A. (2025). La Visualización Matemática y su Impacto en la Comprensión Conceptual: Una Revisión Narrativa. *Revista Científica INGENIAR: Ingeniería, Tecnología e Investigación.*, 8(15), 613-640. <https://doi.org/10.46296/ig.v8i15.0262>
- Lasnibat Godoy, T., Flores Sepúlveda, M., Puraivan Huenumán, E., Lasnibat Godoy, T., Flores Sepúlveda, M., & Puraivan Huenumán, E. (2022). Un estudio de clases virtual para promover la construcción del infinito actual en estudiantes de educación media y primer año de universidad desde la perspectiva de la teoría APOE. *Educación matemática*, 34(3), 218-247. <https://doi.org/10.24844/em3403.08>

- Lopez de los Santos, C. R., & Bedolla Cornejo, L. P. (2020). El aprendizaje adaptativo para la regularización académica de estudiantes de nuevo ingreso: La experiencia en un curso remedial de matemáticas. *EduTec, Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, 74, 206-220. <https://doi.org/10.21556/edutec.2020.74.1627>
- Mena-Lorca, A., & Parraguez, A. M. M. (2016). Mental constructions for the group isomorphism theorem. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 11(2), 377-393. <https://doi.org/10.29333/iejme/340>
- Muñoz-Orozco, A., Martínez-Sierra, G., & Ferrari-Escolá, M. (2025). Comprensión del conjunto solución de inecuaciones lineales en dos variables para proponer una descomposición genética. *AAIEM - Avances de investigación en educación matemática*, 27, 107-127. <https://doi.org/10.35763/aiem27.6017>
- Noriega Márquez, J. A. (2020). Propuesta de Descomposición Genética de la Definición de Máximo y Mínimo. *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 33(2), 471-481.
- Rivera-Núñez, E. M., Hurtado-Aguay, W. E., Vera-Pisco, D. G., & Sornoza-Parrales, D. (2025). GAMIFICACIÓN CON GEOGEBRA: UN ESTUDIO SOBRE EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES LINEALES EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO. *REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINARIA ARBITRADA YACHASUN*, 9(16), 392-405. <https://doi.org/10.46296/yc.v9i16.0595>
- Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 13(1), 89-112.
- Rodríguez Jara, M. A., Mena Lorca, A., Mena-Lorca, J. J. F., Vásquez Saldías, P., & Del Valle Leo, M. E. (2019). Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Enseñanza De Las Ciencias. *Revista De investigación Y Experiencias didácticas*, 37(1), 71-92. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2194>
- Rodríguez, M. A., Gamboa, M. A., Aros, V. H., & Vergara, A. S. (2024). La construcción cognitiva del R3 Espacio Vectorial: Un estudio de caso. *Formación universitaria*, 17(4), 55-70. <https://doi.org/10.4067/s0718-50062024000400055>
- Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación matemática*, 17(1), 5-31.
- Zamorano, C. A., & Parraguez, M. C. (2024). Razonamiento en el álgebra lineal: El caso de la reorganización de un esquema de isomorfismo de espacio vectorial. *Formación universitaria*, 17(5), 111-128. <https://doi.org/10.4067/s0718-50062024000400111>
- Zimmermann, W., Cunningham, S., & Education, M. A. of A. C. on C. in M. (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics: A Project*. Mathematical Association of America.

ACERCA DEL AUTOR

Marco Gregorio Solorzano Mamani: Docente de la Universidad Nacional del Altiplano Puno. Magister en Matemáticas por la Pontificia Universidad Católica del Perú [PUCP]; con diplomatura en Diseño e Innovación en Gestión Curricular por la Universidad Nacional de Juliaca [UNAJ].

Conflicto de intereses:

El autor declara que no incurre en conflictos de intereses.

Contribución de los autores

El autor declara haber desarrollado en su totalidad el presente estudio.

Fuentes de financiamiento

El autor declara que no recibió un fondo específico para esta investigación.

Aspectos éticos y legales

El autor declara no haber incurrido en aspectos antiéticos, ni haber omitido aspectos legales en la realización de la investigación.

Agradecimientos

A los organizadores del II Intercambio de Experiencias Innovadoras de Docentes en el Proceso de Aprendizaje-Enseñanza realizado en la Universidad Nacional del Altiplano de Puno por permitir compartir mi experiencia.