



Caracterización de la distribución temporal de las precipitaciones en Puno mediante la transformada de Wavelet

Characterization of the temporary distribution of precipitation in Puno through the Wavelet transform

Alvaro Vilca Miranda^{1,*} 

¹Universidad Nacional del Altiplano, Puno, Perú.

Resumen

La implementación del análisis de series temporales mediante la transformada de Wavelet en la ciudad de Puno, establece la relación entre la teoría matemática representada en la transformada Wavelet y la tecnología medio ambiental orientadas a la elaboración de una herramienta que facilite el análisis de campo de precipitación, siendo el principal objetivo el desarrollar algoritmos que facilite el análisis en series de tiempo, utilizando la transformada Wavelet lo cual consiste en suministrar curvas de evolución temporal de la serie de datos de precipitación diaria. Se utiliza un método inductivo con el fin de interpretar conceptos preliminares y desarrollar a partir de rutinas computacionales los algoritmos mencionados, este se desarrolla en el entorno del Matlab bajo una estructura conceptual de una caja-gris representado por un sistema SISO (Single Input, Single Output). Los resultados muestran que la reconstrucción de la señal utilizando la transformada inversa Wavelet para diferentes combinaciones de aproximaciones y detalles permite sintetizar una señal que se adecúa prácticamente en un 98 % a la señal original. El desarrollo mostrado realizando el uso de una descomposición multinivel tanto para la transformada de Wavelet como para la transformada inversa Wavelet permite comprender con claridad los fundamentos teóricos de la transformada de Wavelet sin caer en lo abstracto de su fundamento matemático, así también queda detallado la implementación de la DWT mediante filtros pasa alta y filtros pasa baja haciendo uso de la transformada de Haar.

Palabras clave: Precipitación, Series de tiempo, Siso, Transformada Haar, Transformada Wavelet

Abstract

The implementation of time series analysis using the Wavelet transform in the city of Puno, establishes the relationship between the mathematical theory represented in the Wavelet transform and environmental technology oriented to the development of a tool that facilitates the analysis of precipitation field, the main objective being to develop algorithms that facilitate the analysis in time series, using the Wavelet transform which consists of providing curves of temporal evolution of the series of daily precipitation data. An inductive method is used in order to interpret preliminary concepts and develop from computational routines the mentioned algorithms, this is developed in the Matlab environment under a conceptual structure of a gray-box represented by a SISO (Single Input, Single Output) system. The results show that the reconstruction of the signal using the inverse Wavelet transform for different combinations of approximations and details allows synthesizing a signal that matches practically 98% of the original signal. The development shown using a multilevel decomposition for both the Wavelet transform and the inverse Wavelet transform allows a clear understanding of the theoretical foundations of the Wavelet transform without falling into the abstract of its mathematical basis, as well as the implementation of the DWT using high-pass filters and low-pass filters using the Haar transform.

Keywords: Precipitation, Time series, Siso, Haar transform, Wavelet transform

Recibido: 17 set. 2024

Aceptado: 22 dic. 2024

Publicado: 30 dic. 2024

*Autor para correspondencia: avilcam@unap.edu.pe

Cómo citar: Vilca Miranda, A. (2024). Caracterización de la distribución temporal de las precipitaciones en Puno mediante la transformada de wavelet. Revista De Investigaciones, 13(4), 216-223. <https://doi.org/10.26788/ri.v13i4.6485>

Introducción

Las precipitaciones; que según lo define Segerer et al. (2006) engloba a todas las aguas meteóricas que caen sobre la superficie de la tierra, tanto bajo la forma líquida como sólida. Por otro lado, Chereque (1989) y Bateman (2007) definen como precipitación a toda forma de humedad, que, originándose en las nubes, llega hasta la superficie terrestre, los aparatos de uso para la medida de precipitación son los pluviómetros y en el sistema métrico se mide en milímetros y décimos de milímetro. Sin embargo, es importante que las dimensiones de estos instrumentos sean normalizadas para poder comparar las medidas tomadas en diferentes localidades (Parodi O. et al. 2022) además se puede hacer uso de los pluviómetros totalizadores cuando existe la necesidad de conocer la pluviometría mensual o estacional de una zona de difícil acceso (Fernández, 2009). El estudio de las precipitaciones es un factor clave para comprender los patrones climáticos y su impacto en diversas actividades humanas, particularmente en regiones de alta montaña como Puno, Perú. La región de Puno, situada en la meseta del Collao y a gran altitud, presenta un régimen pluviométrico complejo y altamente variable, influenciado por factores geográficos y climatológicos como la altura, la proximidad al lago Titicaca, y las corrientes atmosféricas predominantes. Este tipo de variabilidad espacial y temporal en las precipitaciones puede tener efectos significativos sobre la agricultura, la gestión de recursos hídricos, y la prevención de desastres naturales en la región.

El análisis detallado de los patrones en series temporales como una secuencia de N datos (Mauricio, 2007) de las precipitaciones resulta fundamental para mejorar las proyecciones meteorológicas y para desarrollar estrategias de adaptación frente a los fenómenos climáticos extremos. Por otro lado (González, 2007) indica que, en el marco estadístico de los procesos estocásticos, una serie temporal se puede interpretar como una realización muestral de un proceso estocástico que se observa únicamente para un número finito de periodos. Sin embargo, la naturaleza no estacionaria y multifrecuencial de los datos de precipitaciones plantea desafíos metodológicos que requieren herramientas

avanzadas para su estudio, partiendo desde la reconstrucción de datos faltantes desarrollados en la investigación de Carbajal et al. (2010) así como Yarlequé et al. (2007) y se comparó con los resultados obtenidos con el generador de datos climáticos ClimGen (Nelson, 2002), se sigue luego con la caracterización del campo de precipitaciones (Figueroa, 2016) y finalmente se realiza el análisis temporal de las precipitaciones (Mancero & Ochoa, 2015), (Rodríguez & Llasat, 1997), (Serrano et al., 2012).

En ingeniería se representan las señales ya sea en función del tiempo o de la frecuencia (Cano et al., 2015) además (Rubio et al., 2006) señala que, en la mayoría de las aplicaciones de procesamiento digital de señales, el contenido de frecuencia es muy importante, y la transformada de Fourier es probablemente la transformada que más se utiliza para conocer las principales características diferenciadoras a partir del espectro de frecuencias de una señal. En este contexto, la transformada wavelet se presenta como una herramienta poderosa para analizar series temporales y en contraste con el análisis de Fourier con sus funciones sinusoidales, las wavelets suelen ser irregulares y asimétricas. (Cortes Osorio et al., 2007)

En el marco de la investigación presentada se resalta el estudio de métodos numéricos que se entiende como técnicas matemáticas utilizadas para aproximar soluciones de problemas complejos que no pueden resolverse de manera exacta mediante métodos analíticos. Estos métodos son esenciales en la resolución de ecuaciones algebraicas, diferenciales y problemas de optimización, donde obtener una solución exacta es impracticable debido a la complejidad del problema (Chapra y Canale, 2015) (Burden & Faires, 2016). En ingeniería se representan las señales ya sea en función del tiempo o de la frecuencia (Cano et al., 2015), además (Rubio et al., 2006) señala que, en la mayoría de las aplicaciones de procesamiento digital de señales, el contenido de frecuencia es muy importante. El marco de la investigación requiere realizar el análisis de un conjunto de datos estocásticos a través de wavelets, la cual consiste en una técnica de ventanas con regiones de tamaño variable (Misiti et al., 1997). Una Wavelet es una forma de onda de duración limitada que

tiene un valor promedio cero y en contraste con el análisis de Fourier con sus funciones sinusoidales, las wavelets suelen ser irregulares y asimétricas (Cortes et al., 2007), además el procesamiento del análisis de datos utilizando wavelets consiste en adoptar un prototipo de función llamado wavelet madre y realizar traslaciones de dicha función. Su función original (señal) deberá ser representada como una combinación lineal de la función original y las trasladadas (dilatados) a los que se le conoce como espacio wavelets. (Chui y Heil, 1992). En el análisis wavelet para señales discretas se utiliza una familia wavelet ortonormal (Mallat, 1999), específicamente se hace uso de la transformada Haar, la cual es sencilla y la más básica de las wavelets ortogonales propuesta por Alfred Haar en 1909 (Bhardwaj et al., 2009). Además, matemáticamente (Abdulmunem e Ibrahim, 2016) define la función Haar $\psi(t)$ como una estructura simple de onda cuadrada, por otro lado, para que una función $\psi(t)$ sea clasificada como wavelet, debe de satisfacer las condiciones propuestas por (Addison, 2016).

A la descomposición originada por este tipo de wavelets se lo denomina descomposición en octavas (Castro, 2004), dicha descomposición se realiza mediante el uso de filtros, dicho termino se define como cualquier sistema que discrimina o modifica lo que pasa a través de él de acuerdo con alguno de los atributos de la entrada (Martínez et al., 2010), por otro lado (Meyer, 2007) define el término filtro como dispositivos selectores de frecuencia, es decir, aquellos que “dejan pasar” las señales presentes en ciertas bandas de frecuencia y “bloquean o discriminan” las señales de otras bandas, esta última definición es la que más se acerca a lo que se pretende en el trabajo de investigación. y el realizar el cálculo de los coeficientes wavelets para cada una de las escalas requiere un gran esfuerzo computacional, generando una gran cantidad de datos. Para lograr la implementación de dicho análisis computacional se hace uso de la transformada discreta wavelet (TWD), y para implementar dicho esquema se hace uso de filtros (Mallat, 1999) y (Sadiku, 2006). La idea es desarrollada por (Mallat, 1989) y el algoritmo de Mallat se conoce como un esquema clásico que

consta de un codificador sub banda de dos canales y dicho algoritmo se traduce en una TWD.

El filtrado con wavelets se basa en descomponer una señal en componentes o niveles que representan diferentes escalas de detalle. Esto se logra mediante la DWT, la clave del proceso radica en: Separar las componentes de la señal en frecuencias bajas (aproximaciones) y frecuencias altas (detalles), para luego suprimir o modificar las componentes no deseadas (ruido, interferencias).

Finalmente, luego de descomponer de forma iterativa mediante la TWD, continúa el proceso de reconstrucción de la señal (o síntesis de la señal) para lo cual se hace uso de la transformada discreta inversa wavelet (TWDI). (Misiti et al., 1997)

población motivo del estudio estuvo constituida por el conjunto de las descargas hidrológicas medias diarias que se han producido a través del tiempo, según lo registrado en la estación meteorológica de Puno, además la muestra de estudio lo conformaron el conjunto de datos de la serie histórica de las descargas hidrológicas medias diarias producidas en el tiempo y registradas en el periodo de 2007 al 2011, para dicho proceso se empleó en muestreo no probabilístico, se emplea el muestreo no probabilístico; en este enfoque, la selección de los participantes se basa en criterios específicos, como la accesibilidad o el juicio del investigador, en lugar de utilizar un método aleatorio y es útil en investigaciones exploratorias o cuando no es posible aplicar técnicas de muestreo probabilístico. Debido a limitaciones de tiempo, recursos o disponibilidad de los sujetos (Martínez, 2016).

El propósito de este estudio es desarrollar un software que facilite el análisis de series de tiempo de las precipitaciones pluviales en Puno, aplicando la Transformada Wavelet como método de solución numérica. Además, se busca implementar rutinas computacionales que permitan realizar de manera eficiente el análisis de la Transformada Wavelet en series de tiempo y campos de precipitación, optimizando así el procesamiento y la interpretación de los datos.

Métodos

Lugar de estudio

La investigación se desarrolló en la Universidad Nacional del Altiplano-Puno, en la ciudad de Puno, capital del distrito, la provincia y el departamento del mismo nombre. El Departamento de Puno se encuentra ubicado en la zona Sur-Oriental del país y limita por el Norte con el Departamento de Madre de Dios; por el Este con la República de Bolivia; por el Sur con el Departamento de Tacna y por el Oeste con los Departamentos de Moquegua, Arequipa y Cusco.

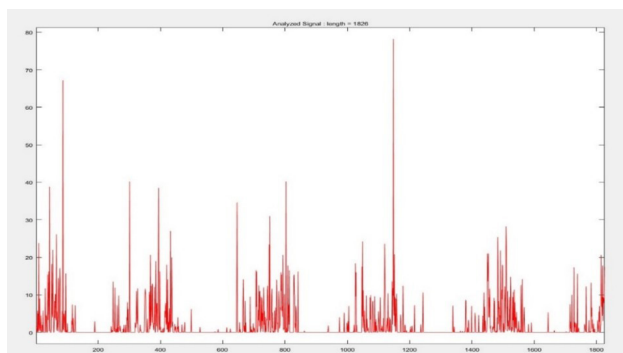
Descripción de métodos

La serie histórica de las descargas hidrológicas medias diarias producidas en el tiempo y registradas en el periodo de 2007 al 2011, fue la información básica para realizar el modelamiento en series temporales con base a la transformada wavelet; dicha serie fue registrada por el SENAMHI-Puno, y los datos se considera como señal original (S) y se presentan en la Figura 01. El conjunto total de datos es de 1826 hasta el presente.

Para analizar los datos de la serie histórica o señal original (S), se tiene como variables dependientes las precipitaciones medias diarias registradas en la ciudad de Puno (señal sintetizada), y como variable independiente la transformada wavelet aplicada como una herramienta para el análisis en series de tiempo (Figura 1).

Figura 1

Serie histórica de las descargas hidrológicas– Señal Original (S).



Procedimiento

En el marco teórico desarrollado Rocha y Alves (2004), señala de manera clara que mientras TWC se logra expandiendo y trasladando la ondícula madre continuamente, se genera una gran cantidad de información redundante. Y la solución a dicho problema, nos lleva a construir un esquema más eficiente y eficaz denominada Transformada Wavelet Discreta. Para aplicar la TWD a una serie temporal de datos, se hace necesario implementar la transformada discreta como una herramienta numérica, y la idea es desarrollada por (Mallat, 1999) y se desarrolla como sigue:

Discretización de la transformada wavelet:

Para el proceso de discretización una función f mediante la transformada wavelet discreta de funciones $L^2(\mathbb{R})$, se parte de una wavelet $\psi(t)$. Ahora, para cada $j \in \mathbb{Z}$, se toma la escala $a = 2^{-j}$ y a su vez se discretiza el dominio temporal en los puntos $b = 2^{-j}k$, $k \in \mathbb{Z}$. (Mallat, 1989). Dicha cantidad discreta de coeficientes wavelet son:

$$C_{j,k} = TWC(2^{-j}, 2^{-j}k) = \langle f, \psi_{2^{-j}, 2^{-j}k} \rangle \quad (1)$$

Donde $j, k \in \mathbb{Z}$. Sólo se está tomando una cantidad discreta de traslaciones (factor de traslación) y dilatación (factor de escala) de la función wavelet, a saber:

$$\psi_{2^{-j}, 2^{-j}k} = \frac{1}{\sqrt{2^{-j}}} \psi\left(\frac{1 - 2^{-j}k}{2^{-j}}\right) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j} - k) = \psi(j, k) \quad (2)$$

A partir de ahora, la función $\psi_{j,k}$ se lee como: wavelet ψ comprimida un factor de 2^j y trasladada al entero k .

Para cada función $f \in L^2$, se calcula los coeficientes de la TWD, mediante la expresión:

$$C_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int f(x) \overline{\psi(2^j x - k)} 2^{j/2} dx \quad (3)$$

Análisis de multiresolución

Una sucesión $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de subespacios cerrados de $L^2\mathbb{R}$ es un análisis multiresolución de $L^2\mathbb{R}$ (o también aproximación multiescala). La construcción de la wavelet ψ pasa a través de una descomposición de $L^2\mathbb{R}$ en subespacios cerrados, encajados y de una función ϕ denominada

función de escala. La función de escala ϕ puede expandirse como combinación lineal infinita de su dilatación y traslación; es decir:

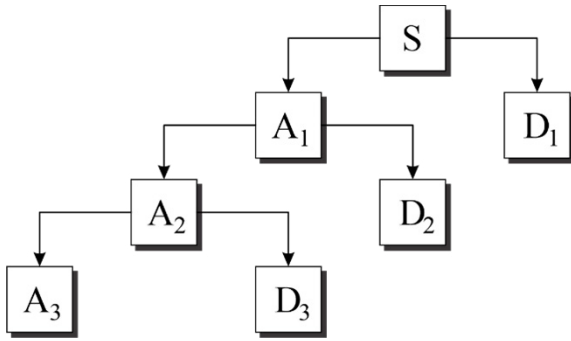
$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} h_k \phi(2x - k) \quad (4)$$

Los coeficientes $h = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ asociado a la función de escala constituyen el filtro h , cabe notar que el filtro h es un filtro pasa bajo asociado a la función de escala ϕ .

Para realizar un proceso de filtro en multiniveles, partimos del filtro de un nivel, para luego iterar el proceso de filtrado, es decir, aplicar el proceso de filtro de un nivel a la señal de salida, específicamente a las aproximaciones (A_i) (Figura 2).

Figura 2

Árbol de descomposición wavelet.



Reconstrucción wavelet

Para lograr reconstruir la señal a partir de los datos de salida del árbol de descomposición wavelet. Es necesario establecer la transformada inversa wavelet (discreta) y queda detallado en la figura 13.

Una vez que se tienen los coeficientes $c_{j,k}$, se procede con la reconstrucción o síntesis de la función f (o síntesis de la señal SS). Se denomina también wavelet sintetizada $\tilde{\psi}$, tal que:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k} \quad (5)$$

Proceso de análisis de la señal

Dada la función f (señal original S), se puede descomponer como:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(x + k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \psi(x + k) \quad (6)$$

Donde ϕ representa a la función de escala ortonormal:

$$\phi(x + k) = \sum_m \sqrt{2} h_m \phi(2x + 2k - m) \quad (7)$$

Y ψ es la ecuación que define la wavelet.

$$\psi(x + k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} g_m \phi(2x + 2k - m) \quad (8)$$

Donde se verifica que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} g_j \bar{h}_j = 0 = \langle g, h \rangle \quad (9)$$

Basado en la ecuación anterior, se entiende o define a h como un filtro pasa bajo, y a g como el filtro pasa alto.

Para llevar a cabo este proceso, se calcula las constantes C_k de la transformada wavelet discreta, las cuales se definen como:

$$c_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \bar{h}_m s_{2k-m} \quad (10)$$

Seguido del cálculo de los detalles D_k :

$$D_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \bar{g}_m s_{2k-m} \quad (11)$$

Proceso de síntesis de la señal

El proceso para lograr sintetizar la señal consiste en:

- Intercalar ceros entre los coeficientes de c y realizar la convolución con \tilde{h}
- Intercalar ceros entre los coeficientes de d y realizar la convolución con \tilde{g}
- Posterior se debe sumar ambas convoluciones. Filtros ortogonales de análisis: h y g (sus conjugados).

Filtros de análisis: \tilde{h} y \tilde{g} (sus conjugados)

Filtros de síntesis: \tilde{h} y \tilde{g} (sus transpuestos)

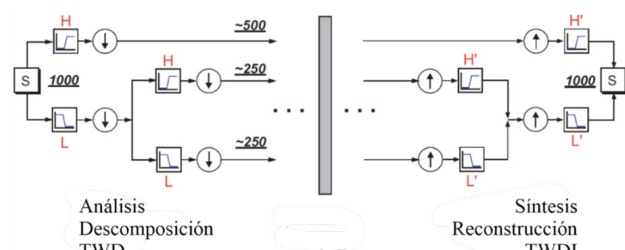
Luego se procede a calcular:

$$SS = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k h_{2k-n} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k g_{2k-n} \quad (12)$$

El diseño del algoritmo para alcanzar el objetivo específico, (Figura 3).

Figura 3

Análisis y síntesis de la caracterización de señales de precipitación



Fuente: (Misiti et al., 1997)

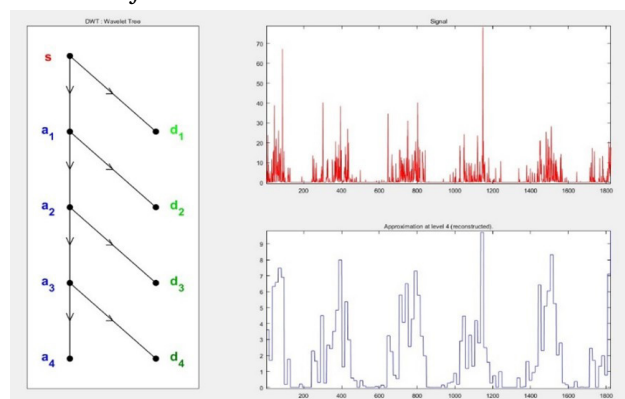
Resultados y discusión

Modelamiento en base a la transformada Wavelets

El procedimiento se realiza sobre la señal original S mediante la TWD, teniendo como wavelet madre la transformada Haar. Se realiza un total de 4 iteraciones con la finalidad de obtener una mayor descomposición de la señal. Se muestra el resultado del proceso de filtrado, donde se detalla el esquema de árbol de la descomposición de la señal, además se muestra la señal original (S) y la aproximación (A_4) (Figura 4).

Figura 4

Proceso de filtrado basado en 04 niveles.

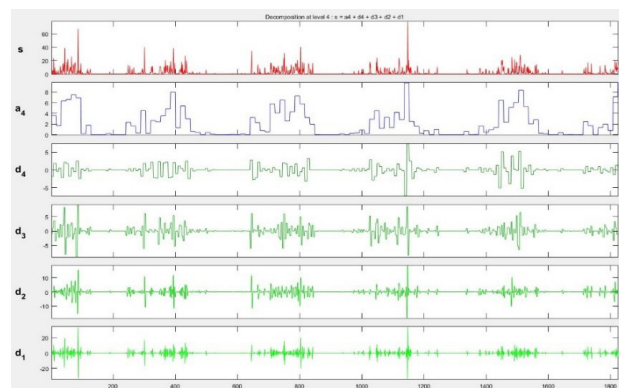


Además del esquema anterior (Figura 04), se obtiene también la aproximación de nivel 04 (A_4)

y los detalles 1, 2, 3 y 4 (D_1, D_2, D_3, D_4) tal como se muestra en la Figura 5

Figura 5

Descomposición de la señal en 04 niveles



Luego de descomponer de forma iterativa mediante la TWD, continúa el proceso de reconstrucción de la señal utilizando la transformada discreta inversa wavelet (TWDI)

Síntesis de la señal:

En segundo lugar, se inicia la reconstrucción de la señal tomando la aproximación cuatro (A_4) y diferente configuración de los detalles (D_i ; $i=1, 2, 3, 4$), la sintetización de la señal para las diferentes configuraciones se resume en:

$$SS_1 = c A_4 + c D_4$$

$$SS_2 = c A_4 + c D_4 + c D_3$$

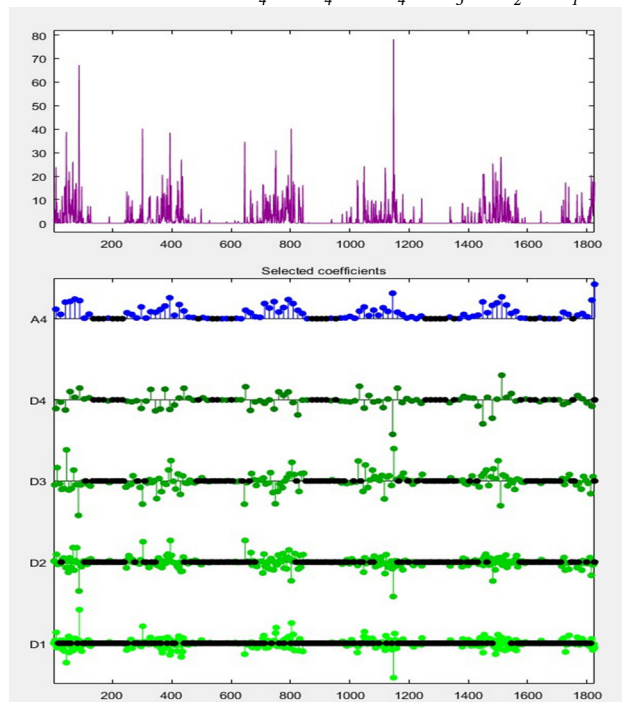
$$SS_3 = c A_4 + c D_4 + c D_3 + c D_2$$

$$SS_4 = c A_4 + c D_4 + c D_3 + c D_2 + c D_1$$

La figura 6 muestra la cuarta síntesis de la señal o cuarta reconstrucción de la señal, la cual en comparación con la señal original con la figura 1, muestra una diferencia muy leve. Por la cual se verifica que la cuarta síntesis es una aproximación exacta a la señal original.

Figura 6

Síntesis de la señal: $SS_4 = c A_4 + c D_4 + c D_3 + c D_2 + c D_1$



Conclusiones

Las rutinas computacionales implementadas se desarrollan sin la necesidad de caer en lo abstracto del fundamento matemático de la transformada wavelet, así también queda detallado la implementación de la transformada wavelet discreta mediante el uso de la transformada de Haar y la implementación de transformada wavelet discreta inversa para la reconstrucción de la señal, finalmente la implementación del modelo en base a la transformada wavelet, filtra la señal original “S” mediante la transformada wavelet discreta utilizando la transformada de Haar en cuatro niveles y logra sintetizar la señal basada en la transformada wavelet discreta inversa, finalmente se logra la reconstrucción total de la señal “SS” la cual se adecúa a su comportamiento real (señal original).

Referencias

Abdulmunem, M. E., & Ibrahim, F. B. (2016). The Design of Efficient Algorithm for Face Recognition Based on Hybrid PCA-Wavelet Transform. *Iraqi Journal of Science*, 57(2), 995–1006.

Addison, P. S. (2016). *The Illustrated Wavelet Transform Handbook: Introductory Theory and Applications in Science* (2nd ed.). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781315372556>

Alexander, C. K., & Sadiku, M. N. O. (2006). *Fundamentos de Circuitos eléctricos* (3a Ed.). McGraw Hill.

Bateman, A. (2007). *HIDROLOGIA BASICA Y APLICADA*.

Bhardwaj, A., & Ali, R. (2009). Image compression and reconstruction using modified fast haar wavelet transform. *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*, 7(5), 647–653. [https://www.idosi.org/wasj/wasj7\(5\)/13.pdf](https://www.idosi.org/wasj/wasj7(5)/13.pdf)

Burden, R. L., & Faires, J. D. (2016). *Análisis numérico* (Novena Edición). Grupo Editorial Iberoamérica.

Cano, E., Salcedo, R., & Soto, G. (2015). *Análisis de principios y aplicaciones de la transformada wavelet*. 2(1). https://www.academia.edu/6395498/Análisis_de_principios_y_aplicaciones_de_la_transformada_wavelet

Carbajal Carrasco, M., Yarlequé, C., Silvestre, E., Mejía, A., & Quiroz, R. (2010). Reconstrucción de datos faltantes de precipitación pluvial diaria mediante la Transformada Wavelet Daily rainfall data-gap filling using a Wavelet Transform-based methodology. *REVISTA PERUANA GEO-ATMOSFÉRICA RPGA* (2), 88(2), 76–88.

Castro, L. R., & Castro, S. M. (2004). Wavelets y sus Aplicaciones. *1er. Congreso Argentino de Ciencias de La Computación*, 195–204.

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). *chapra* (Séptima edición). <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0963-0>

Chereque Moran, W. (1989). *Hidrología para estudiantes de ingeniería civil*, Pontificia Universidad Católica del Perú, obra auspiciada por CONCYTEC, Lima, Perú. <http://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/28689>

Chui, C. K., & Heil, C. (1992). *An Introduction to Wavelets* (Vol. 6, Issue 6). <https://doi.org/10.1063/1.4823126>

Cortes Osorio, J., Cano Garzón, H., & Chaves Osorio, J. (2007). *Del Análisis De Fourier A Las Wavelets*.

- Scientia et Technica, 5(37), 133–138. <https://doi.org/10.22517/23447214.4017>
- Fernández Serdán, J. M. (2009, July 31). "Dinosaurios" meteorológicos de montaña: los totalizadores de precipitación. <https://Www.Tiempo.Com/Ram/809/Dinosaurios-Meteorologicos-de-Montana/>. <https://www.tiempo.com/ram/809/dinosaurios-meteorologicos-de-montana/>
- Figueroa Ortiz, C. A. (2016). *Caracterización del campo de precipitación sobre la microcuenca urbana del campus Universidad Nacional de Colombia-sede Bogotá* [Maestría]. Universidad Nacional de Colombia Facultad.
- González, M. P. (2007). *Análisis de series temporales económicas: modelos ARIMA*.
- Mallat, S. (1999). *A WAVELET TOUR OF SIGNAL PROCESSING*. (2nd ed.). Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-466606-1.X5000-4>
- Mallat, S. G. (1989). A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *Fundamental Papers in Wavelet Theory*, II (7), 494–513. <https://doi.org/10.1515/9781400827268.494>
- Mancero Mosquera, I., & Ochoa Chehab, X. (2015). Análisis de Fourier y Wavelet de Las Series de Tiempo de la Estación Meteorológica Espol-Fimbor. *Revista Tecnológica ESPOL*, 28 (Septiembre), 34–50.
- Martínez, M. (2016). *Metodología de la investigación*. 2ª Ed. Mexico. Editorial Trillas.
- Martínez, M., Gómez, L., Serrano, A. J., & Gómez, J. (2010). *Introducción a los filtros digitales*. Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Electrónica.
- Mauricio, J. A. (2007). Análisis de series temporales. In *Revista Ingeniería Industrial* (Issue 1).
- Meyer Baese U. (2007). *Digital Signal Processing with Field Programmable Gate Arrays* (3a ed.). Springer.
- Misiti, M., Misiti, Y., Oppenheim, G., & Poggi, J. M. (1997). *Wavelet Toolbox™ 4 User's Guide Product enhancement suggestions Wavelet Toolbox™ User's Guide*.
- Nelson, R. (2002). *ClimGen*. A flexible weather generation program. https://www.researchgate.net/publication/313082104_ClimGen_A_flexible_weather_generation_program
- Parodi O., I., Sobrino P., D., Ortega P. Jesús, Villa S., L., & Janna P., J. (n.d.). *INTESCO-Soluciones Hídricas Confiables*. <https://Www.Intesco.Com.Co/Sabes-En-Que-Se-Diferencian-Un-Pluviometro-y-Un-Pluviografo/>. Retrieved July 18, 2022, from <https://www.intesco.com.co/sabes-en-que-se-diferencian-un-pluviometro-y-un-pluviografo/>
- Rocha Reis, A., & Alves Da Silva, A. P. (2004). *APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA NA PREVISÃO DE CARGA A CURTO PRAZO VIA REDES NEURAIAS*. <https://doi.org/10.1590/S0103-17592004000100013>
- Rodríguez, R., & Llasat, M. C. (1997). Análisis temporal y espectral de la serie de precipitación mensual de Barcelona (España) 1850-1991. *Ingeniería Del Agua*, 4(4), 19–28. <https://doi.org/10.4995/ia.1997.2732>
- Rubio Cerda, E., Jáuregui Correa, J. C., & González Brambila, O. (2006). Aplicación de la transformada Wavelet en la detección de defectos causados por vibrado en piezas cilíndricas rectificadas. *Ingeniería Mecánica. Tecnología y Desarrollo*, 47–52.
- Segeer, C. D., & Villodas, R. (2006). Hidrología I. In *Hidrología I* (p. 2). <http://www.conosur-rirh.net/ADVF/documentos/hidro1.pdf>
- Serrano, E. P., Figliola, A., & Fabio, M. (2012). Time-frequency methods based on the wavelet transform. *Revista de Matemática Teoría y Aplicaciones*, 19(2), 157–168. <https://www.scielo.sa.cr/scielo.php?script=sci-arttext&pid=S1409-24332012000200003>
- Yarlequé, C., Posadas, A., & Quiroz, R. (2007). *Reconstrucción de datos de precipitación pluvial en series de tiempo mediante transformadas de wavelet con dos niveles de descomposición*. December. <https://www.researchgate.net/publication/267028168%0AReconstrucción>

