



# INGENIERÍA Y SITUACIÓN DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LA DERIVADA EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍAS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

## ENGINEERING AND DIDACTIC SITUATION FOR LEARNING OF THE DERIVATIVE IN ENGINEERING STUDENTS OF THE UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

Fabiola Loayza Torreblanca<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidad Nacional del Altiplano de Puno, Facultad de Ingeniería Civil y Arquitectura - Escuela profesional de Ciencias Físico Matemáticas, Av. Floral 1153, Puno, Perú, [floayza@unap.edu.pe](mailto:floayza@unap.edu.pe)

### RESUMEN

La investigación enmarca el enfoque cualitativo e investigación descriptiva cuyo objetivo fue: describir la incidencia de la metodología de la enseñanza basada en la Ingeniería y situación didáctica en el aprendizaje de la noción de la derivada, para lo que se diseñó las situaciones didácticas, se identificó las dificultades y errores que presentan los estudiantes en el proceso de aprendizaje. La secuencia didáctica se diseñó teniendo como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau, se propusieron actividades relacionadas al lenguaje y pensamiento variacional. La metodología que se utilizó fue la Ingeniería Didáctica de Michel Artigue. Se aplicó a una muestra intencional a 20 estudiantes matriculados en el curso de cálculo diferencial 2018 de la Escuela Profesional de Ingeniería Agrícola de la Universidad Nacional del Altiplano. El diagnóstico no fue satisfactorio dado que la mayoría de los estudiantes en la escala vigesimal obtuvieron menos de 11 en las preguntas de interpretación. Después de la aplicación de las situaciones didácticas el resultado fue satisfactorio porque más de la mitad están en la escala de calificación de, en proceso y correcto. Las dificultades y errores que los estudiantes presentan en el proceso son esencialmente la falta de conocimientos en base relacionados al lenguaje y pensamiento variacional cuya característica es la no aprehensión en niveles de educación previos. La conclusión más relevante es que la metodología de la enseñanza basada en la ingeniería y situación didáctica incide de manera significativa en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

**Palabras clave:** Aprendizaje, derivada, ingeniería didáctica, metodología, situaciones didácticas.

### ABSTRACT

This research is part of the qualitative approach and descriptive research whose objective was: to describe the incidence of the teaching methodology based on Engineering and the didactic situation in the learning of the notion of the derivative, for which the didactic situations were designed, the difficulties and errors that students present in the learning process were identified. The didactic sequence was designed taking Brousseau's Theory of Didactic Situations (TSD) as a theoretical framework, activities related to language and variational thinking were proposed. The methodology that was used was the Didactic Engineering of Michel Artigue. It was applied to an intentional sample to 20 students enrolled in the 2018 differential calculus course of the Professional School of Agricultural Engineering of the National University of the Altiplano. The diagnosis was not satisfactory since the majority of the students on the vigesimal scale obtained less than 11 in the interpretation questions. After the application of the didactic situations the result was satisfactory because more than half are on the rating scale of, in process and correct. The difficulties and errors that students present in the process are essentially the lack of knowledge based on language and variational thinking whose characteristic is non-apprehension at previous levels of education. The most relevant conclusion is that the teaching methodology based on engineering and the didactic situation has a significant impact on the teaching and learning process.

**Keywords:** Learning, derivative, didactic engineering, methodology, didactic situations.

\*Autor para correspondencia: [floayza@unap.edu.pe](mailto:floayza@unap.edu.pe)



## INTRODUCCIÓN

El objeto matemático “derivada” es un pilar fundamental dentro del estudio de cálculo también es herramienta necesaria para todas las áreas del saber humano porque aporta información concreta directa y científica. Históricamente el concepto actual de la derivada paso por cuatro etapas. Primero, la derivada se utilizó, después se descubrió, posteriormente se exploró y desarrolló y, finalmente, se definió (Ponce 2015). Stewart (2017), la derivada, es un tipo especial de límite, surge la misma clase de límite en la búsqueda de la pendiente de una línea tangente o la velocidad de un objeto, en realidad surgen cuando se calcula una razón de cambio.

El pensamiento y lenguaje variacional es una línea de investigación o una forma de pensamiento que se caracteriza en proponer el estudio de situaciones y fenómenos en el que está involucrado el cambio y la necesidad de predecir estados futuros (Caballero & Cantoral 2006), Los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social utilizan diferentes estructuras y lenguajes variacionales (Cantoral 2004), el mundo está caracterizado por cambios continuos por lo que es importante desarrollar métodos matemáticos para cuantificar, describir y pronosticar estos cambios, esto es el propósito del cálculo diferencial que es la matemática de los cambios (Wenzelburger 1993); por otro lado el lenguaje y pensamiento variacional es una

herramienta fundamental en el estudio y comprensión de fenómenos que involucran el cambio o variación de magnitudes (Vrancken & Engler 2014).

Es preciso manifestar la importancia que debería tener la dimensión didáctica en la enseñanza de la Matemática; es decir, la importancia que se le debe asignar al uso de una teoría didáctica al proponer alternativas de enseñanza Advíncula (2010), además la enseñanza del cálculo debería estar dirigida principalmente a que los estudiantes trabajen con ideas variacionales, estudien y modelen fenómenos de cambio para ello es necesario desarrollar su pensamiento y lenguaje variacional (Cantoral 2014), la enseñanza de los principios del cálculo resulta bastante problemática, aunque los docentes sean capaces de enseñar a los estudiantes a resolver más o menos de forma mecánica algunos problemas estándar, algunas derivadas o integrales, tales acciones están muy lejos de lo que supondría una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento del análisis matemático (Artigue 1995; Moreno 2005; Mateus 2011; Cantoral & Reyes 2015; Dolores & Garcia 2011), además el uso de esquemas algebraicos en la resolución de problemas, sin reflexión teórica de los conceptos inmersos en ellos, el desconocimiento de episodios históricos que han sido clave en el desarrollo de los conceptos matemáticos es un problema que debería tener en cuenta el docente (Badillo 2004), los estudiantes trabajan mejor en lo algorítmico que en lo visual-

gráfico, mostrando que sus conocimientos en álgebra son predominantes pero les falta tener la noción del significado, es importante integrar métodos gráficos y visuales (Mendoza 2003; Sánchez *et al.* 2008). Otro problema en el aprendizaje de la derivada es el abordaje de la noción de límite y también la idea de infinito pues involucran aspectos cognitivos que no pueden ser generados solamente a partir de la definición matemática ya que el estudiante puede recordar a mediano plazo la definición del concepto de límite pero la concepción y construcción es muy distinto que son obstáculos epistemológicos (Oviedo & Kanashiro 2010; (Azcarate *et al.* 2011; Sierpiska 1990), debemos señalar que Artigue (1995), al respecto señala que las dificultades ligadas al concepto de límite se clasifican en tres categorías: Los obstáculos epistemológicos, las dificultades ligadas a la dualidad proceso/objeto y las dificultades ligadas al pasaje de una aprehensión intuitiva del concepto a su aprehensión “formal” aunque en la enseñanza de las matemáticas se hace necesario trabajar haciendo uso de modelos sencillos y prácticos, es por eso que esta propuesta para el desarrollo del concepto de la derivada se inicia a través del cociente incremental, que conlleve al estudiante a conceptualizar el límite de una forma natural (Lozano 2011; González *et al.* 2013; Camargo 2013). El currículo de matemática y los métodos de enseñanza durante mucho tiempo fueron inspirados sólo por ideas que provienen de la estructura de las matemáticas formales y por métodos didácticos fuertemente apoyados en la

memoria y en la algoritmia (Vrancken & Engler 2014), cabe señalar que para el aprendizaje de la derivada es necesario la representación de registros semióticos ya que nos indica y muestra que juegan un papel muy importante en la conceptualización de la derivada. García *et al.* (2011) señala que los temas que se debe tener en cuenta para el aprendizaje de la derivada son marcadamente la función, variable independiente y dependiente, dominio, imagen, gráfica, crecimiento y decrecimiento, variación entre dos valores del dominio, tasa media de variación, extremos relativos y absolutos, función lineal y afín, Pendiente de una recta, velocidad media.

La ingeniería didáctica se denomina así porque es una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero, quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control científico (Artigue 1995) y la situación didáctica de Brousseau trata de una teoría de la enseñanza, que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea (Panizza 1986). Chávez (2015), propuso una secuencia didáctica, con problemas de optimización que fueron aumentando en dificultad a lo largo de la implementación de esta Ingeniería didáctica, de manera tal que los recursos algebraicos resultaron insuficientes para resolverlos - en un momento de la experimentación - y, por lo tanto, tuvieron que acudir a la aplicación de la derivada. Calla

(2017), también trabaja con situaciones didácticas llegando a la conclusión que esta favorece al aprendizaje. Finalmente respecto a los errores y dificultades que cometen los estudiante al resolver las tareas matemáticas es importante el análisis de esta, porque es una fuente primordial de retroalimentación en el proceso de enseñanza-aprendizaje; identificar los errores, ayuda al alumno a tomar conciencia de que puede aprender de sus errores y también los docentes, a aprender mucho de los errores de nuestros alumnos (González-García *et al.* 2018; Engler *et al.* 2004).

Los objetivos de esta investigación fueron, determinar la incidencia de la Metodología de la enseñanza basada en la Ingeniería y situaciones didácticas en el aprendizaje de la derivada en estudiantes de ingenierías de la Universidad Nacional del Altiplano y los objetivos específicos fueron Diseñar la situación didáctica, que contribuya de manera significativa al aprendizaje de la noción de la derivada, identificar las dificultades y caracterizar los errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la noción de la derivada.

## MÉTODOS

### Ámbito o Lugar de Estudio

El ámbito de estudio fue la Escuela profesional de Ingeniería Agrícola de la Universidad Nacional del Altiplano, ubicada, en la región de Puno, departamento de Puno y provincia de Puno; Puno es una ciudad de la sierra al sureste del Perú a orillas del lago Titicaca, la ubicación geo

referencial de Puno es latitud: 15°50'31"S, longitud: 70°01'11"O y está a 3 825 m.s.n.m. La Universidad cuenta con 18,941 estudiantes y atiende en su mayoría a la población estudiantil que egresa de las diferentes provincias, distritos, centros poblados de la región cuya población se dedica a la agricultura, ganadería y al comercio, los idiomas que predominan son castellano y con remarcada presencia el aimara y el quechua.

### Descripción de Métodos

La población en estudio, fue de 20 estudiantes, 6 mujeres y 14 varones matriculados en el curso de calculo diferencial del primer semestre 2018 II de la Escuela Profesional de Ingeniería Agrícola, el espacio y escenario de estudio fue el aula 104 del pabellón de Ingeniería Agrícola de la Universidad Nacional del Altiplano.

Las técnicas y recolección de datos fueron: La observación y grupo focal. Para interpretar la realidad, los instrumentos que se utilizaron para la recolección de la información para el presente trabajo de investigación fueron: evaluación, Registro de información de las actividades, cuestionarios, Guía de observación, cuaderno de campo, Guía de Grupos Focales, Trabajo de Campo.

### Para el primer objetivo específico

Se tuvo un periodo de estudio de 5 meses; los materiales que se utilizaron fueron libro texto base James Steward, en base al cuestionario que respondieron los docentes involucrados se hizo un análisis de tres textos adicionales señalados;

historia del Cálculo y su desarrollo conceptual Carl Boyer, un cuestionario sobre los datos importantes de los estudiantes, un cuestionarios para analizar conocimientos previos con los que contaban los estudiantes, un cuestionario para los estudiante de nivel superior y tener referencia respecto a lo que conocen sobre la derivada, cuestionario a docentes sobre bibliografía y metodología que usan en la enseñanza del cálculo diferencial, , silabo de la E.P. de Ingeniería Agrícola, actas de notas de semestres anteriores a la investigación para tener referencia del rendimiento académico en el curso; la categoría analizada fue la fase preliminar compuesta por la variable didáctica, epistemológica y la variable cognitiva; utilizamos la observación y se utilizó el sistema vigesimal para la evaluación de las actividades.

### **Para lograr el segundo y tercer objetivo específico**

Se tuvo un periodo de estudio de un mes. Los materiales utilizados fueron las situaciones didácticas diseñadas. Las categorías utilizadas fueron el análisis a priori, experimentación y el análisis a posteriori; las variables analizadas fueron la acción, formulación para luego validarlas. Para obtener los resultados se comparó el análisis a priori (que es lo que espero que haga el estudiante en el proceso de experimentación) con el análisis a posteriori (que hizo el estudiante en el proceso de experimentación)

## **RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

### **La incidencia de la metodología de la enseñanza basada en la Ingeniería y situación didáctica en el aprendizaje de la noción de la derivada**

En cuanto a la incidencia de la ingeniería y situación didáctica en el aprendizaje de la derivada es importante señalar que la ingeniería didáctica ha permitido el desarrollo de las situaciones didácticas y al hacer la comparación del análisis a priori con el análisis a posteriori se pudo visualizar como los estudiantes han ido desarrollando la noción de la derivada. En el diagnostico se obtuvo que más de la mitad de los estudiantes evaluados no tenían claro la noción de la derivada obteniendo menos de once en la escala vigesimal; a diferencia de los estudiantes que se les aplicó la situación didáctica, se analizó que la mayoría de los estudiantes estuvieron entre lo considerado correcto y en proceso y en las actividades grupales se observó mayor comprensión que las actividades individuales dentro de lo correcto y en proceso.

La ingeniería didáctica nos ha permitido desarrollar esta investigación enlazando en ella las situaciones diseñadas mostrando como incide en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción de la derivada. Rios (2007) nos señala la efectividad de la aplicación de la ingeniería didáctica en las fracciones; también (Chavarria 2008) al igual que nuestra investigación describen los principales aspectos del concepto de

situación didáctica elaborado por G. Brousseau. En particular, las distinciones entre situación didáctica y situación no didáctica, algunos “efectos” que acontecen en las situaciones didácticas y los distintos tipos de éstas refiriendo las incidencias en las matemáticas. Vrancken & Engler (2014) trabajo en el contexto de una ingeniería didáctica, diseñó una secuencia y señalo que los resultados que obtuvieron de su implementación a partir de la observación de las actividades desarrolladas lograron motivar a los alumnos y movilizar sus concepciones. La discusión de los resultados obtenidos favorece la optimización de la secuencia tanto como a nosotros. También se tiene otras propuestas que en cierta medida tienen otro enfoque como Pineda (2013), que muestra la enseñanza de la derivada utilizando el TICs señalando que los jóvenes se mueven en el mundo de la tecnología, desde mi punto de vista para nuestro medio en el que no es tan cierto, ya que muchos de nuestros estudiantes no tienen acceso al internet, viven en zonas rurales alejadas donde no llegan estas, o no están en la posibilidad de pagar un servicio para que puedan estudiar y repasar lo avanzado en clase. La importancia del papel que juegan los registros de representación semiótica en el aprendizaje fueron aplicados para nuestro diseño al igual que los resultados de Camargo (2013), mostraron que el tránsito por ellas es de una importancia e inciden en el aprendizaje de un objeto matemático. Pozsgai (2014) en sus resultados señala que los estudiantes con los que ejecuto su investigación muestran deficiencias en

los conocimientos previos, el contexto el que el trabajo es muy diferente al nuestro empezando de donde provienen etc. En el fondo tienen las mismas falencias lo más importante es que al igual que nosotros él ha logrado demostrar que la secuencia didáctica diseñadas le han permitido demostrar que contribuyen a la mejor comprensión del objeto matemático Derivada.

### **Diseño de las situaciones didácticas**

Las situaciones didácticas se han logrado elaborar desde el lenguaje y pensamiento variacional teniendo como base la ingeniería didáctica y dentro de ella la categoría del análisis preliminar y subcategorías referidas al análisis epistemológico, análisis cognitivo y análisis didáctico de la derivada.

El diseño de las situaciones didácticas se inició con actividades dinámicas de manera secuencial de tal manera que al estudiante se le encamine en el desarrollo del lenguaje y pensamiento variacional. Vrancken & Engler (2014) del Pensamiento y Lenguaje Variacional, dice que estudia la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos. Las actividades permitieron analizar diversos escenarios de variación (qué magnitudes cambian, cómo y cuánto cambian), caracterizar variaciones entre las magnitudes, a través del cálculo de razones de cambio, y explorar cómo la pendiente de una curva se relaciona con la razón de cambio; en nuestro trabajo para el aprendizaje

de la noción de la derivada usamos situaciones relacionadas a desarrollar el pensamiento variacional y hemos llegado a los resultados que mediante nuestro proceso el estudiante puede llegar a entender la noción de derivada, pero Aguilar & Riestra (2009) señala que aplicando problemas de máximos y mínimos seleccionados y ordenados permiten desarrollar también gradualmente el concepto de derivada que en cierta medida da luces para poder entender la noción de la derivada desde otro enfoque; debemos señalar que son dos formas de trabajo para diferentes contextos ya que cuando trabajamos con estudiantes de ingenierías desde nuestro punto de vista es mejor trabajar con problemas que ayuden a desarrollar el lenguaje y pensamiento variacional. También al igual que Ramírez (2009) nuestros resultados muestran que la epistemología de Cauchy es la más rigurosa y difícil, al inicio de esta investigación hemos podido encontrar que nuestros estudiantes que inician la universidad muestran poco desarrollo del lenguaje y pensamiento variacional y por ende escasa comprensión acerca de los conceptos, procedimientos y relaciones básicas. Para el diseño de las situaciones también hemos tomado en cuenta el tránsito por los diferentes registros de representación. Dolores & García (2011), han tomado como ejes directrices a la variación y a la transición entre registros (geométrico, numérico, algebraico, analítico, físico, verbal) en su diseño de situaciones didácticas, lo que nos permite corroborar positivamente lo trabajado. A resultados relativamente similares (Zambrano *et*

*al.* 2019; Vrancken & Engler 2014) , La importancia del papel que juegan los registros de representación semiótica en los resultados de este trabajo de investigación nos lleva a encontrar que varias investigaciones como el de Camargo (2013) mostraron que el tránsito por ellas es de una importancia e inciden en el aprendizaje de un objeto matemático. Pozsgai (2014) a partir de conocimientos que los alumnos tienen de los conceptos previos permita reforzar la interpretación geométrica de la derivada de una función  $f$  cuando la variable independiente toma un valor específico aquí trabajo con el diseño de tareas lo que difiere con nuestro trabajo. en sus resultados señala que los estudiantes con los que ejecuto su investigación muestran deficiencias en los conocimientos previos, el contexto el que el trabajo es muy diferente al nuestro empezando de donde provienen etc. En el fondo tienen las mismas falencias lo más importante es que al igual que nosotros él ha logrado demostrar que la secuencia didáctica diseñadas le han permitido demostrar que contribuyen a la mejor comprensión del objeto matemático Derivada.

### **Identificar las dificultades y errores que presentan los estudiantes en el proceso del aprendizaje**

La evaluación, Registro de información de las actividades, cuestionarios, Guía de observación, cuaderno de campo, Guía de Grupos Focales, Trabajo de Campo y de manera complementaria el análisis a posteriori ha permitido identificar las

dificultades que presentan los estudiantes. De manera transversal en su mayoría es el acceso que tienen a estudiar de manera continua sin interrupciones ya que están en constante desplazamiento de su lugar de origen a la ciudad de Puno, ello les crea una inestabilidad y falta de concentración. También muestran deficiencias en el tránsito de representación semiótica, interpretación de problemas contextualizados; los errores que cometen la mayor parte de los estudiantes son operativos, inseguridad en mostrar sus respuestas.

El identificar los errores, ayuda al alumno a tomar conciencia de que puede aprender de sus errores y a nosotros mismos, los docentes, a aprender mucho de los errores de nuestros alumnos (Engler *et al.* 2004) En la etapa de acción en nuestro trabajo al igual que (Mendoza 2003) se ha observado la dificultad que tienen los estudiantes en el tránsito del tratamiento gráfico al numérico. Coincidimos que los estudiantes tienen problemas en entender la noción de derivada como los resultados que nos muestra Sanchez *et al.* (2008) los estudiantes pueden desarrollar de manera mecánica los problemas estándar, pero en lo que tienen problemas es en tener la noción del significado de la derivada. (Pozsgai 2014) en sus resultados señala que los estudiantes con los que ejecuto su investigación muestran deficiencias en los conocimientos previos lo que en esta también hemos encontrado a pesar de que el ámbito de estudio es muy diferente. En el aprendizaje del concepto de

derivada se generan algunos conflictos semióticos, por la dificultad que tienen los alumnos en el manejo del registro simbólico Pozsgai (2014); Azcarate *et al.* (2011) señala que tanto la enseñanza como el aprendizaje del concepto de límite presenta enormes dificultades pues involucran aspectos cognitivos que no pueden ser generados solamente a partir de la definición matemática, ya que uno puede recordar la definición del concepto de límite, otras dificultades que agrega Gutiérrez *et al.* (2017) es en lo algebraico, aritmético y de interpretación simbólica.

## CONCLUSIONES

Las situaciones didácticas diseñadas para el trabajo individual inciden de manera significativa en la enseñanza, aprendizaje de la noción de la derivada y el trabajo grupal tiene un cierto incremento en relación con el aprendizaje del trabajo individual. Así mismo las dificultades halladas de manera transversal es la falta de estabilidad de vivienda ya que la mayoría viaja de manera permanente a sus lugares de origen en donde deben hacer labores agrícolas y otras, esto les genera falta de concentración y tiempo para que aprendan. En lo referente a los conocimientos se encontró falta de manejo algebraico operacional, inseguridad en sus respuestas ya que en su mayoría necesita la anuencia del docente para certificar su aporte o resultado y probablemente es consecuencia de falta de conocimientos previos estructurados en el estudiante y los errores que cometen son de

conceptos, no tienen claro las escalas, el tránsito de registros de representación y operacionales.

### AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a la Maestría en Educación con mención en Didáctica de la Matemática de la Universidad Nacional del Altiplano que ha contribuido a complementar mi formación profesional, agradecer a cada uno de los docentes que con dedicación y esmero han sabido trazar el camino para que este trabajo se inicie y culmine quiero agradecer en especial a mi

asesor el Dr. Wenceslao Quispe Yapo por el apoyo brindado en el proceso y conclusión de esta investigación, también debo agradecer a mis amigos y colegas de la E.P. de Ciencias Físico Matemáticas que han colaborado con sus sugerencias, respondiendo encuestas y han participado con mucho interés en el proceso de y culminación de esta investigación.

### CONFLICTO DE INTERÉS

La autora, no tiene conflicto de interés de ninguna índole.

### REFERENCIAS

- Advíncula, C. (2010). Una situación didáctica para la enseñanza de la función exponencial, dirigida a estudiantes de las carreras de humanidades. *Repositorio PUCP*. 1-124  
[http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/4717/advincula\\_clemente\\_elizabeth\\_situacion\\_exponencial.pdf?sequence=1&isallow](http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/4717/advincula_clemente_elizabeth_situacion_exponencial.pdf?sequence=1&isallow)
- Aguilar, A., Riestra, J. (2009). Una introducción algebraica y dinámica al concepto de Derivada. *MATEMATICA EDUCATIVA*, 1-12.  
[https://scholar.google.es/scholar?hl=es&as\\_sdt=0%2C5&q=Una+introduccion+algebraica+y+Dinamica+al+concepto+de+Derivada&btnG=](https://scholar.google.es/scholar?hl=es&as_sdt=0%2C5&q=Una+introduccion+algebraica+y+Dinamica+al+concepto+de+Derivada&btnG=)
- Arce, A. (2006). Cálculo integral y Matemática Básica. 2da Edición. Editorial Limusa. Lima, Perú 778pp.
- Ariza, A. (2014). Análisis del uso del concepto de derivada por estudiantes universitarios en el estudio de conceptos Económicos. *Univeridad de Alicante*. 137-153  
<https://www.redalyc.org/pdf/4762/476255362008.pdf>
- Artigue, M. (1995) . Ingeniería Didáctica . *Ingeniería didáctica en educación matemática*. 97-140  
<http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf#page=105>
- Azcarate, C., Badillo, E., Moreno M., (2011). Historia y aplicaciones de la derivada en las ciencias económicas: consideraciones didácticas. *Economía XXXVI* . 137-171  
[http://iies.faces.ula.ve/Revista/Articulos/Revista\\_31/Pdf/Rev31Garcia.pdf](http://iies.faces.ula.ve/Revista/Articulos/Revista_31/Pdf/Rev31Garcia.pdf)

- Badillo, E. (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia. Barcelona, España.  
<https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2003/tdx-0611104-144929/erbj4de4.pdf>
- Brousseau, G. (1986). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*. 5-38.  
<http://funes.uniandes.edu.co/10210/1/Educacion2000Brousseau.pdf>
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática. M. Villalba (Editor). Investigación didáctica de la matemática. Burdeos, Francia. 115pp  
<http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001%5CFundmentosBrousseau.pdf>
- Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires:  
<http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v21n2/v21n2a8.pdf>
- Calla, A. (2018). Una situación didáctica para la enseñanza de la derivada, en el segundo ciclo de la carrera de ingeniería en una universidad privada. *Universidad Enrique Guzman y Valle* Lima, Perú 1-105. <http://repositorio.une.edu.pe/handle/UNE/1770>
- Camargo, A. (2013). El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza aprendizaje del cálculo. *Actas del VII CIBEM*, 1-9. <http://funes.uniandes.edu.co/18554/1/Camargo2013El.pdf>
- Cantoral, R. (2000). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta latinoamericana de matemática educativa*. 1-9  
<http://funes.uniandes.edu.co/6235/1/CantoralDesarrolloAlme2005.pdf>
- Cantoral, R. y. (2000). Sobre el estatus de la noción de la derivada: De la Epistemología de Joseph Louis Lagrange, al diseño de una situación didáctica. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 265-292. <http://funes.uniandes.edu.co/9605/1/Cantoral2000Sobre.pdf>
- Cantoral, R., & Farfan, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. 1ra. Edición. Editorial Iberoamericana.  
[https://www.researchgate.net/profile/Ricardo\\_Cantoral/publication/264544527\\_Epsilon\\_R\\_Cantoral/links/53e3ee740cf21cc29fc6a78c.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Ricardo_Cantoral/publication/264544527_Epsilon_R_Cantoral/links/53e3ee740cf21cc29fc6a78c.pdf)
- Chávez, C. (2015). Aprendizaje significativo de la derivada a partir de una ingeniería didáctica diseñada en torno a la optimización de funciones. *UTN*. 1-114.  
<http://190.114.222.124/handle/123456789/3064>
- Delgado, J., & Medina, N. (2017). Uso del blog como herramienta para el aprendizaje significativo de la derivada en estudiantes de ingeniería. *centro de investigación utmach*, 789-801.  
<http://investigacion.utmachala.edu.ec/proceedings/index.php/utmach/article/view/164>

- Do Carmo, J. (2016). Aprendizagem da derivada: Uma Perspectiva de Análise Pelos Fluxos de pensamento. *UNIVERSIDAD CATOLICA De Sao Paulo*, 1-15.  
<https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/20962/000243348.pdf?sequence=1>
- Dolores, C. (2007 ). Elementos para una aproximación variacional a la derivada. Mexico: Diaz de Santos.  
[http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1665-24362007000100004](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362007000100004)
- Dolores, R. (1996). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato. Cuba: ISP.Enrique J. Varona. <https://www.semanticscholar.org/paper/Derivada%3A-una-propuesta-para-su-comprensio%C3%B3n-Socorro-Gonz%C3%A1lez/c5b0dd9d4ef492a17661b924cf012a630e973f09#paper-header>
- Escolano, R. (2013). Introducción a la Derivada. Zaragoza: Universidad Zaragoza.  
<https://zaguan.unizar.es/record/11189/files/taz-tfm-2013-268.pdf>
- Espinoza, E. (2012). Análisis Matemático I. 3ra Edición. Editora edukperu. Lima Perú 722 pp.
- Figueroa, E. (2018). Análisis Matemático I. 2da Edición. Editorial R.G.M. E.I.R.L. Lima, Perú 738 pp.
- Figueroa, R. (2013). Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables una propuesta para el cuarto año de secundaria. una propuesta . *Pontificia Universidad Católica del Perú*. Lima,Perú. <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/4736>
- Fuentealba, C. ( 2017). Análisis del esquema de la derivada en estudiantes Universitarios. Universidad Autónoma de Barcelona. Barcelona, España.  
<https://www.tesisenred.net/handle/10803/458677#page=1>
- Godino, J., Batanero, C., Font, V. (2014). Modelo para el analisis didactico en educación matemática. *infancia y aprendizaje*. 89-105 <http://dx.doi.org/10.1174/021037010790317243>
- Gonzalez, J., Chavez, O., Loera, E. (2013). Comprensión del concepto de la derivada como razón de cambio. *CULCYTMatemática Educativa*, 1-11.  
<http://148.210.132.19/ojs/index.php/culcyt/article/view/934/870>
- Haaser, N., & LaSalle, J. (1974). Análisis Matemático.2da Edición. Editorial Trillas. México. 980pp.
- Lazaro, M. (2014). Cálculo diferencial. 2da. Edición. Editorial MOSHERA. Lima, Perú. 648pp.
- Leithold, L. (1999). El cálculo . 7ma. Edición. Editorial HARLA MÉXICO. México.1348pp.
- Lozano, Y. (2011). Desarrollo del concepto de derivada sin la noción de Limite. *Fundación Universitaria Konrad lorenz*. 1-14

[http://www.konradlorenz.edu.co/images/stories/articulos/desarrollo\\_de\\_la\\_derivada\\_sin\\_la%20nacion\\_del\\_limite.pdf](http://www.konradlorenz.edu.co/images/stories/articulos/desarrollo_de_la_derivada_sin_la%20nacion_del_limite.pdf)

Martinez, J., Lopez, R., Gras, A., & Torregrosa, G. (2002). La diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de diferencial y su clasificación en la enseñanza de la física. *Enseñanza de las Ciencias*, 271-283. [21811-Texto%20del%20articulo-21735-1-10-20060309.pdf](http://21811-Texto%20del%20articulo-21735-1-10-20060309.pdf)

Mendoza, M. (2003). Representación de la derivada de una función. *Instituto de ciencias Básicas - Universidad Autónoma de Hidalgo*. 1-144  
<http://dgsa.uaeh.edu.mx:8080/bibliotecadigital/handle/123456789/40>

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 81-96.  
[http://funes.uniandes.edu.co/1325/1/Gonzalez2005El\\_SEIEM\\_81.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/1325/1/Gonzalez2005El_SEIEM_81.pdf)

Oviedo, L., Kanashiro, A. (2010). Caracterización de distintos registros de representación del concepto límite funcional en la bibliografía básica de cálculo”. *III REPEM*, 577-584.  
<http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem10/memorias/comunicaciones/Reflexiones/CB%2052.pdf>

Pineda, C. (2013). Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada en el último grado de educación secundaria . Bogotá: UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA.  
<https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/75064/01186769.2013.pdf?sequence=1>

Popayan, Y., & Castillo, V. (2017). Situación Didáctica y enseñanza del pensamiento Variacional. *EDUCARE*, 571-579.

Poszgai, E. (2014). Diseño de tareas que contribuyan a un aprendizaje significativo del concepto de derivada en estudiantes de Ciencias Administrativas. *Pontificia Universidad Católica del Perú* 1-105  
[http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bistream/handle/123456789/5782/pozsgai\\_hernani\\_erick\\_diseño\\_aprendizaje.pdf](http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bistream/handle/123456789/5782/pozsgai_hernani_erick_diseño_aprendizaje.pdf)

Ramos, E. E. (2012). Análisis Matemático para estudiantes de Ciencias e Ingeniería. 3ra. Edición. Editorial Edukperu. Lima, Perú 722pp.

Rico, R. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.  
<http://funes.uniandes.edu.co/486/1/rico195-100.pdf>

Rincon, E. (2009). Historia de la Epistemología de la función Derivada. *EPISTEME*, 157-162. [261-Texto%20del%20articulo-911-1-10-20091020%20\(2\).pdf](http://261-Texto%20del%20articulo-911-1-10-20091020%20(2).pdf)

- Sanchez, G., Garcia, M., & Linares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 267-296.  
[http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1665-24362008000200005](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000200005)
- Sandoval, J. (2014). Introducción al concepto derivada: Un diseño experimental con estudiantes universitarios de humanidades. Recuperado el 29 de Octubre de 2017, de  
<http://www.clame.org.mx/documentos/alme27.pdf>
- Stewart, J. (2018). *Calculo de una variable*. 6ta. Edición. Editorial Cengage Learning Editores S.A. de C.V. México. 923pp.
- Vrancken, S. (2011). La construcción de la derivada desde la variación y el cambio articulando distintos sistemas de representacion. *Boletin de Educacion* 25-42.  
<http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a22> Una
- Wenzelburger, E. (1993). Didáctica del cálculo diferencial. 1ra Edición. grupo editorial Iberoamericana. *Educacion Matematica* 93-124  
<http://funes.uniandes.edu.co/9645/1/Conceptos1993Wenzelburger.pdf>