



## ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN COBB-DOUGLAS QUE MEJOR OPTIMIZA LA PRODUCTIVIDAD DE LA QUINUA ORGÁNICA EN LA REGIÓN PUNO, 2015-2016

### ANALYSIS OF THE COBB-DOUGLAS FUNCTION THAT BEST OPTIMIZES THE PRODUCTIVITY OF ORGANIC QUINOA IN THE PUNO REGION, 2015-2016

Juan Cruz Lauracio<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidad Nacional del Altiplano, Facultad de Ingeniería Económica Av. Sesquicentenario N° 1154 Ciudad Universitaria, Puno, Perú, [Jcruz24117@hotmail.com](mailto:Jcruz24117@hotmail.com)

#### RESUMEN

El trabajo de investigación tiene como objetivo general, analizar la función de producción que mejor optimiza la productividad y explicar su elasticidad de sustitución de factores, en la producción de quinua orgánica; el método de investigación es no experimental, transeccional, correlacional – causal, utiliza datos de corte transversal, recopilado a través de encuestas; correlacional – causal, la investigación es una relación causa - efecto entre variables independientes (inputs) y la variable dependiente (output); se ha analizado cuatro modelos econométricos: funciones lineal multivariable, cuadrática, cúbica y la función de producción de Cobb-Douglas, siendo esta última el modelo escogido, lo cual permite alcanzar los objetivos de la investigación y contrastar las hipótesis planteadas, al cual se le ha realizado los test de multicolinealidad, heterocedasticidad y autocorrelación. Una vez especificado el modelo log-log cuyos parámetros de las variables: trabajo (jornal/ha.), capital (hrs./maq/ha.) y la tierra en una hectárea, presentan signo positivo, son consistentes estadísticamente y se corrobora con la teoría microeconómica de la producción; la elasticidad de sustitución entre factores productivos es positivo ( $e_s=1.001$ ), significa que los factores capital y trabajo se pueden sustituir ante variaciones de sus precios relativos; el óptimo económico es ( $Q=1439$  kg/Ha.) de quinua orgánica; la función presenta economías constantes a escala. Los factores productivos estadísticamente significativos que más influye en el nivel de producción de quinua orgánica son el capital ( $KT$ ), trabajo ( $MO$ ) y tierra ( $T$ ), manteniendo fijas las demás variables (ceteris paribus); los beneficios económicos ascienden a la suma de S/. 4 492.00 Soles por hectárea cultivada en una campaña agrícola.

**Palabras clave:** Beneficios, costos, función de producción, optimización, quinua orgánica.

#### ABSTRACT

The research work has a general objective to analyze the production function that best optimizes productivity and explain its elasticity of factor substitution in the production of organic quinoa; the research method is non-experimental, transectional, correlational-causal, uses cross-sectional data, collected through surveys; correlational-causal, the investigation is a cause-effect relationship between independent variables (inputs) and the dependent variable (output); four econometric models have been analyzed: multivariable linear, quadratic, cubic functions and the production function of Cobb-Douglas, the latter being the chosen model, which allows to reach the objectives of the research and to contrast the hypotheses proposed, which has been tested the multicollinearity, heteroscedasticity and autocorrelation tests. Once the log-log model has been specified, the parameters of the variables: work (wage/ha.), capital (hrs./maq/ha.), and land in one hectare, have a positive sign, are statistically consistent and are corroborated with the microeconomic theory of production; the elasticity of substitution between productive factors is positive ( $e_s = 1.001$ ), it means that the capital and labor factors can be substituted before variations in their relative prices; the economic optimum is ( $Q = 1439$  kg/Ha.) of organic quinoa; the function presents constant economies of scale. The statistically significant productive factors that most influence the level of production of organic quinoa are capital ( $KT$ ), labor ( $MO$ ) and land ( $T$ ), keeping other variables fixed (ceteris paribus); the economic benefits amount to the sum of S/. 4 492.00 Soles per hectare cultivated in an agricultural campaign.

**Keywords:** Benefits, costs, production function, optimization, organic quinoa.

\*Autor para correspondencia: [Jcruz24117@hotmail.com](mailto:Jcruz24117@hotmail.com)





## INTRODUCCIÓN

Pindyck y Rubinfeld (2013) afirman que hay tres pasos en la producción de bienes y servicios: (i) la tecnología de la producción, que es la combinación de factores productivos para producir un bien, (ii) restricciones de costes, las empresas deben tener en cuenta los precios del trabajo, del capital y de otros insumos, que conlleve a la minimización de sus costos, (iii) elecciones de los factores: dada su tecnología de producción y los precios de los factores productivos, la empresa debe decidir qué cantidad va a utilizar de cada insumo. El agricultor primero debe elegir qué producto o productos se van a producir, luego decidir cómo se asignarán los recursos disponibles entre los productos (Debertin, 2012).

Nicholson y Snyder (2011) refieren que la función de producción es un modelo abstracto, que muestra la relación entre insumos y productos se expresa matemáticamente de la forma:  $q = f(K.L.M...)$ , donde  $q$  es la producción de un bien en un periodo dado,  $K$  es la maquinaria empleada durante el periodo,  $L$  son las horas de trabajo y  $M$  representa las materias primas. La función de producción representa la relación que existe entre los insumos y el producto, asimismo, la función de producción puede explicar por ejemplo cuando se utiliza un nivel cero de insumos la producción puede ser cero o en algunos casos, puede obtenerse un nivel de producto sin insumos (Debertin, 2012). Una función de producción indica el máximo nivel de producción que puede obtener una empresa con cada combinación de factores y que las empresas utilizan una variedad de factores productivos (Pindyck y Rubinfeld, 2013). Por otro lado, la función de producción mide el volumen máximo de producción que puede obtenerse con una cantidad dada de factores, asimismo supone que existe función de producción con un solo factor y con varios factores, en este último se representa a través de una isocuanta, que es la combinación de dos insumos manteniendo los demás fijos (Varian, 2010).

El tiempo influye en la toma de decisiones del empresario o productor, en el corto plazo uno o más factores se mantienen fijos y solo un factor puede variar; en el largo plazo todo los factores varían, al respecto (Varian, 2010), asimismo (Pindyck y Rubinfeld, 2013) coinciden en que el corto plazo, es una estructura de tiempo donde las cantidades de algunos recursos son fijas y el largo plazo es una estructura de tiempo donde las cantidades de todos los recursos pueden variar. En la producción agrícola el nivel de empleo del insumo variable puede ser controlado por el administrador de la granja, mientras que el insumo fijo por no está bajo su control (Debertin, 2012).

Rosales, Apaza y Bonilla (2004) desarrollaron modelos econométricos que tienen mayor uso en la economía agrícola, tales como: cuadrática, cúbica, raíz cuadrada, Cobb-Douglas, Leontief, CES, trascendental y translogarítmica; asimismo la ecuación de costos para cada función de producción. (Salvatore, 2009) otra característica de una función de producción es el grado de “facilidad” con que se puede sustituir capital por trabajo, manteniendo constante el nivel de producción y que depende de la forma de una sola isocuanta, el grado de facilidad para realizar esa sustitución varía, en algunos casos se puede hacer la sustitución fácil y rápidamente ante las circunstancias cambiantes de la economía; esta capacidad de sustituirse un factor por otro se mide con la elasticidad de sustitución.

Hay casos extremos como dos insumos que pueden ser sustitutos perfectos y otro par de insumos que no pueden sustituirse, estas funciones de producción son pocas o rara vez utilizado por los economistas agrícolas, los valores de la elasticidad de sustitución van desde cero a infinito, los insumos que no se sustituyen tiene una elasticidad cero, mientras que los insumos que se sustituyen entre sí en proporciones fijas en cualquier punto a lo largo de una isocuanta tienen una elasticidad infinita, asimismo los valores cercanos a cero significan poca posibilidad de sustitución, los valores mayores a cero indican mayor potencial de sustitución (Debertin, 2012). Por otro lado (Eguiguren, 2009) en su trabajo sobre “la



elasticidad precio de la demanda de energía a nivel industrial de Chile”, determina la elasticidad de sustitución entre la energía y el resto de los factores productivos (capital y trabajo), refiere que una forma de estimar la elasticidad de sustitución entre factores es la elasticidad de sustitución de Morishima-MES; y que todos los factores productivos que se utilizan en el sector manufacturero de Chile son sustitutos, es decir (capital, trabajo y energía), se pueden sustituir uno al otro. Existe una metodología para estimar la elasticidad de sustitución entre factores de producción que es la de Henderson y Quant, la misma que está basada en primera y segunda derivadas de una función de producción (Debertin, 2012). En la tecnología de producción del algodón (Cortázar y Montaña, 2011) refieren la relación existente entre el nivel de producto y el uso de los factores productivos: agua, trabajo, tierra, maquinarias, financiamiento, asistencia técnica, cambios climáticos y otros; con datos de 20 años, establecen el modelo Cobb Douglas, en este modelo demuestran que la producción de algodón es intensiva en maquinaria porque su elasticidad (coeficiente de la variable capital) es mayor a la del trabajo; además dicha función de producción muestra rendimientos crecientes a escala, porque la suma de sus parámetros del modelo linealizado es mayor a la unidad ( $\sum \beta_i = 1.35$ ).

McFadden y Miranowski (2016), sobre el cambio climático y la variación de la productividad en el cultivo de maíz y soya, en Iowa, Illinois y Nebraska, refieren que la bioeconomía podría contribuir a mitigar la degradación del medio ambiente, para lo cual hay que disminuir la erosión del suelo y el uso de productos químicos tóxicos; con empleo de datos panel, ha estimado la función de producción Cobb-Douglas. Para obtener el óptimo económico se utiliza la función de producción Cobb-Douglas, para dos variables:  $Y_t = \theta_1 x_1^{\theta_2} x_2^{\theta_3} + e_t$ , donde  $t=1,2,\dots,n$ ; y se aplica el método de mínimos cuadrados ordinarios, luego para especificar los parámetros del modelo se hace la prueba de *Wald*; seguidamente se estima el máximo beneficio de la empresa, con la ecuación:  $I = P_y Y - C$ , donde  $I$  es el ingreso neto,  $P_y$  precio del producto y  $C$  costo de los insumos, entonces la mayor diferencia entre el ingreso y los costos de producción viene a ser el óptimo económico (Castellanos *et al.*, 2006). Rebollar *et al.*, (2018) en una investigación experimental, el nivel óptimo técnico en la producción de leche en el Sur de México, donde se utiliza una función de producción Cobb-Douglas con dos variables:

$$Y = \beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \mu_i, \text{ La ecuación linealizada es:}$$
$$\log(y) = \log(\beta_0) + \beta_1 \log(x_1) + \beta_2 \log(x_2) + \log(u_i)$$

Donde,  $Y$  es la producción de leche,  $\beta_0$  es la ordenada al origen,  $\beta_1$  coeficiente de la variable alimento concentrado,  $\beta_2$  coeficiente de la variable forraje;  $x_1$  alimento concentrado,  $x_2$  forraje y  $\mu_i$  la variable aleatoria error; en la cual para optimizar la función de producción sujeto a un presupuesto (isocosto) se aplica el método de multiplicador de Lagrange; ésta metodología de optimización de la producción de leche muestra los rendimientos de escala decrecientes para el producto leche y que el óptimo técnico es de 353.8 litros. En la determinación del óptimo técnico y el óptimo económico del maíz, se utiliza la función cuadrática, en una investigación de tipo experimental a partir de los insumos nitrógeno ( $N$ ), fosforo ( $P_2O_5$ ) y potasio ( $K_2O$ ), con datos de 40 productores con un promedio de 100 m<sup>2</sup> de tierra cada uno; en el trabajo indica que el óptimo técnico es de 101.86 qq/a y el óptimo económico es de 97.57 qq/ha., de maíz, este último es la producción real (Reyes, 2008). Mounirou y Balogoun (2016) sobre la productividad de la soya en la comunidad de Savé-Benín-África Occidental, aplicando el modelo de Cobb-Douglas, por el método econométrico de máxima verosimilitud, con variables independientes: semilla (kg/ha), fertilizante (kg/ha), insecticida ( $L/ha$ ), trabajo (hombre/día/ha), el capital (suma de la  $D$  lineal de equipos que duran mayor a un año y valor de compra de equipos que duran menos de un año) y la superficie cultivada (ha); con datos de corte transversal de una muestra de 66 productores de soya; obtuvo la función de producción Cobb-Douglas linealizado, log-lineal:

$$\begin{aligned} \ln(Prod_i) = & -2.71 + 0.175\ln(Sem_i) + 0.157\ln(Engr_i) + 1.101\ln(Insec_i) \\ & + 1.102\ln(Trav_i) + 0.290\ln(Capi_i) - 0.240\ln(Sup_i) \end{aligned}$$

La suma de las elasticidades de los factores de producción es mayor a uno (2.585), lo cual significa que la función de producción de la soya en la Comuna de Savé presenta rendimientos crecientes a escala. Indican que se puede mejorar el rendimiento de la soya sin aumentar la combinación de insumos, es decir, con la influencia de variables cualitativas como la capacitación de productores que no se encuentra en el modelo. Por otro lado (Chipana *et al.*, 2014) sobre la influencia de los factores productivos: tierra ( $X_1$ ), semilla ( $X_2$ ), maquinaria agrícola ( $X_3$ ) y mano de obra ( $X_4$ ) en la producción del *tarwi* (*lupinus mutabilis*) en la región Norte de Bolivia; asimismo, la influencia del nivel de escolaridad combinado con cada uno de los insumos en la productividad del *tarwi*; determinando la función de producción de Cobb Douglas  $Y = e^{0.46} X_1^{-0.13} X_2^{0.92} X_3^{-0.02} X_4^{0.02}$ , refieren que los insumos tierra y maquinaria presentan una relación inversa frente al producto, lo que significaría que los incrementos unitarios en estos insumos conducen a que la productividad marginal sea negativa; por otro lado, los factores semilla y mano de obra presentan una relación directa con el producto ( $Y$ ) y que la elasticidad global del modelo es 0.78.

Ramírez (2013), para la optimización de la producción de arroz en la región central de Colombia, con el modelo Cobb-Douglas paramétrico determinístico, que no requiere de un supuesto sobre el término aleatorio ( $\text{error} = \mu$ ), las variables explicativas del modelo son: semilla en kg ( $X_1$ ), nitrógeno en kg ( $X_2$ ), mano de obra en horas ( $X_3$ ), maquinaria en horas ( $X_4$ ) y tierra en ha ( $X_5$ ); con datos de corte transversal a 85 productores, por el método econométrico de MCO corregido, ha establecido la función de producción:  $Y = e^{2.061} X_1^{0.154} X_2^{0.135} X_3^{0.239} X_4^{0.085} X_5^{0.381}$ , los parámetros son significativos, con un coeficiente de determinación  $R^2 = 99.8\%$ , y la elasticidad global es de 0.994, lo cual presenta economías constantes de escala; refiere que los productores de arroz pueden incrementar la productividad, reducir los costos y aumentar los beneficios.

Sobre la eficiencia económica en la producción de cacao, utilizando el modelo Cobb-Douglas, con variable dependiente la producción de cacao ( $Y$ ) y las variables independientes: la cantidad de mano obra familiar ( $X_1$ ), cantidad de mano de obra contratada ( $X_2$ ), cantidad de fertilizante orgánico e inorgánico ( $X_3$ ); con datos de corte transversal en una muestra de 55 agricultores, con el método de MCO estimaron los parámetros de la ecuación, comparando luego con el de MCO corregido, el resultado fue:  $\ln Y = e^{4.833} + 0.130 \ln X_1 + 0.050 \ln X_2 + 0.203 \ln X_3$ , los signos de los parámetros son significativos, el coeficiente de determinación  $R^2 = 50.7\%$ , la elasticidad global es 0.36, significa que el modelo presenta rendimientos decrecientes a escala (Clavijo y Ardila, 2015). (Toro *et al.*, 2010) sobre los modelos econométricos para desarrollar funciones de producción en la actividad ganadera (crecimiento animal y producción de leche), entre modelos lineales y modelos no lineales dentro de este último la función de producción Cobb-Douglas  $Y = AX_1^\alpha X_2^\beta$ , donde  $Y$  es la cantidad de producto,  $A$  es un parámetro constante de eficiencia,  $\alpha$  y  $\beta$  son las elasticidades y  $X_i$  son los factores productivos; indican que el valor de  $A$  es diferente según el tamaño de la empresa y depende de la tecnología, del acierto de empresario y de factores aleatorios; afirman que en el sistema ganadero el que mejor se ajusta es la función Cobb Douglas porque es una herramienta eficaz para la gestión y toma de decisiones, explica el comportamiento del producto en relación a las variables, la ley de rendimientos decrecientes y economías de escala.

## MATERIALES Y MÉTODOS

La investigación se realizó en el ámbito de la Región Puno, a los productores de quinua orgánica certificada, ubicados en: provincia de Puno distrito de Capachica (Cooperativa Agraria e Industrial Kapac-Tika) con 500 productores; provincia de San Román, distrito de Cabana (Cooperativa Agroindustrial Cabana-COOPAIN) con 692 productores y en la provincia de El Collao – Ilave (Tatawilca-APROTAWI) con 41 productores. Población total es de 1233 productores. El distrito de Cabana se encuentra situado al oeste de la Provincia de San Román, en la zona central del departamento de Puno y en la parte sur del territorio peruano, se halla sobre una altitud de 3 901 m.s.n.m. el periodo de precipitaciones pluviales comprende los meses de enero, marzo y parte de abril; los meses de mayo a noviembre en su mayoría son de periodo seco, con fuertes heladas por las noches. Según Climat-Data.Org, la temperatura promedio anual en Cabana es 8.3 °C, la mínima es de -4.3 °C ocurre en el mes de julio y la temperatura máxima es de 18.3 °C en noviembre; la precipitación más alta se da en el mes de enero con 148 mm., en promedio. En el aspecto social (Ceplan, 2017) indica que la pobreza monetaria en Cabana es 35.2% y la pobreza extrema es de 9.6%. El distrito de Capachica se encuentra localizada en la provincia de Puno, al nor-este de la ciudad de Puno, sobre una altitud de 3,880 msnm, por el lado Este se encuentra el Lago Titicaca, el clima en el distrito de Capachica es similar a la de Cabana, según Climat-Data.Org la temperatura promedio anual es de 7.9 °C, el mínimo es de -1.4 °C ocurre en el mes de Julio y el máximo es 15.1 °C entre el mes de octubre y noviembre, la precipitación pluvial más elevada se da en el mes de enero con 178 mm, en promedio. Sobre la situación socio económico, (Ceplan, 2017) menciona que la pobreza en Capachica es de 60.6% y la pobreza extrema es 22.8%. El distrito de Ilave se encuentra en la provincia de El Collao a una distancia de 50 km de la ciudad de Puno, sobre los 3 850 msnm, el clima es igual que en todo el altiplano puneño; según Climat-Data. Org la temperatura promedio es de 8.4 °C, la mínima es de menos 0.8 °C en el mes de junio, y la máxima es de 15.7 °C en diciembre; la precipitación pluvial más elevada es en el mes de enero con 168 mm., según el (Ceplan, 2017) la pobreza en Ilave es del 36.8% y la pobreza extrema es del 10.3%.

El método de investigación aplicada, para lograr los objetivos es no experimental, transeccional, correlacional – causal, transeccional porque los datos se han recopilado en un momento dado a través de encuestas; es correlacional – causal, debido que la investigación es una relación causa-efecto entre variables independientes y la variable dependiente. Asimismo, como indica (Mendoza, 2014) los economistas utilizan la metodología inductiva, deductiva y la metodología hipotético-deductiva

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se ha seleccionado la función de producción adecuada, que permita explicar la optimización de la producción de quinua orgánica y la elasticidad de sustitución de factores, en la Región Puno; por lo tanto, se ha analizado en base a la teoría de producción agrícola con un insumo variable y con más de dos insumos variables, asimismo tomando en cuenta los diferentes trabajos de investigación agropecuaria, tanto del país así como del extranjero, relacionados a la optimización de la producción, se presenta y explica cada uno de las funciones.

Se presenta la función de producción cuadrática, para la quinua orgánica, donde la variable dependiente es la cantidad de producto en kg/ha y las variables explicativas: el capital ( $KT$ ), mano de obra ( $MO$ ), semilla ( $SEMI$ ) y el estiércol ( $EST$ ); solo los parámetros del capital y de la semilla son significativos al 1% y 5% respectivamente, los demás no son significativos; la constante es negativo ( $C=-165.6$ ) lo que significaría que en el caso de que el empleo de los insumos sea nula, la cantidad de producción sería negativo, este hecho no concuerda con la teoría clásica de la producción, asimismo manteniendo fijo los



factores capital, semilla y estiércol; pero la mano de obra como un factor variable, solamente por encima de los 43 jornales la producción sería positiva (Tabla 1).

**Tabla 1.** Estimación de los parámetros estadísticos de la función de producción cuadrática de la quinua orgánica, Puno, 2015-2016.

Variable	Coefficiente	Error estándar	t	
C	-165.630	46.130	-3.590	
KT	62.087	11.165	5.561	***
MO	3.858	3.259	1.184	
SEMI	44.277	20.821	2.127	**
EST	0.017	0.069	0.248	
KT <sup>2</sup>	-0.520	0.331	-1.568	
MO <sup>2</sup>	0.004	0.010	0.412	
SEMI <sup>2</sup>	0.268	0.318	0.841	
EST <sup>2</sup>	0.000	0.000	0.775	

Relevancia estadística a los niveles de: (\*\*) $5\%$  y (\*\*\*) $1\%$ , significancia.

$R^2=98\%$        $F=1541$       Durbin-watson = 1.298

El coeficiente de determinación es 0.98, es decir, el 98% de la variabilidad del producto es explicado por los insumos capital, mano de obra, semilla y el estiércol; el modelo presenta un coeficiente de determinación  $R^2$  y  $F$  altas y valores de  $t$  bajos, por lo tanto, el modelo presenta multicolinealidad. Por otro lado, el modelo cuadrático es escaso en los trabajos de investigación de la optimización de producción agrícola, sin embargo, se encontró la “determinación de una función de producción en maíz, a partir del nitrógeno, fósforo y potasio” (Reyes, 2008) aplica una función de producción cuadrática, investigación de tipo experimental, con datos panel. El presente trabajo de investigación se diferencia por ser no experimental y con datos de corte transversal, en ese contexto el modelo cuadrático no optimiza la productividad de quinua orgánica, porque es una función de producción solo aditiva y no multiplicativo (Debertin, 2012), lo cual significa que, ante incrementos en alguno de los insumos, no genera sinergia en el sistema como un todo que podría mejorar la productividad y no presenta la condición de homogeneidad.

En la tabla, muestra la función de producción lineal multivariable, la variable dependiente es la cantidad de producto ( $Q$ ), las variables explicativas, capital ( $KT$ ), mano de obra ( $MO$ ), tierra ( $T$ ) y semilla ( $SEMI$ ); la constante o el intercepto es negativo, esto implica que si se emplea cero insumos, la cantidad de producto sería negativo, este hecho según la teoría de la producción de corto plazo no es consistente, porque si el empresario no emplea ninguna cantidad de algún insumo, entonces el producto debería ser cero (Tabla 2).

**Tabla 2.** Estimación de los parámetros estadísticos, de la función de producción lineal, de quinua orgánica, Puno, 2015-2016.

Variable	Coefficiente	Error estándar	t	
C	-329.804	32.1878	-10.2463	
KT	59.263	5.9139	10.0209	***
MO	4.456	0.9623	4.6302	***
T	-631.142	184.4352	-3.4220	***
SEMI	112.615	17.0852	6.5914	***

Relevancia estadística a los niveles de: (\*\*\*) $1\%$ , significancia.  $R^2=0.98$





La variable tierra ( $T$ ) presenta signo que no está de acuerdo con la teoría microeconómica de producción de corto plazo, si el productor incrementa la tierra en una hectárea, la cantidad de producto se haría cada vez negativo. Estadísticamente a un nivel de significancia del 1% y de manera individual las variables son significativas, de forma conjunta es igualmente significativo cuya probabilidad ( $p$ ) es cero; el coeficiente de determinación es 98%, dichos indicadores serían los adecuados, pero el modelo, no cumple con la ley de rendimientos decrecientes, asimismo no es posible aplicar y estimar el valor de la elasticidad de sustitución entre factores, para ello se requiere la segunda derivada, la misma que no se podría calcular; cabe añadir que son escasos los estudios de optimización de producción agrícola con este tipo de función o modelo, por lo tanto, este modelo no podría ser aplicado para optimizar la productividad de la quinua orgánica.

Se muestra la función de producción cúbica cuyos parámetros individualmente, tales como la mano de obra ( $MO$ ) y semilla ( $SEMI$ ) son estadísticamente significativos al 5% y 1%, de nivel de significancia respectivamente (Tabla 3).

**Tabla 3.** Estimación de los parámetros estadísticos, de la función de producción cúbica, de quinua orgánica, Puno, 2015-2016.

Variable	Coefficiente	Error estándar	t	
C	98.610	62.440	1.579	
KT	46.190	33.386	1.384	**
KT <sup>2</sup>	0.123	2.425	0.051	*
KT <sup>3</sup>	-0.004	0.037	-0.121	*
MO	23.923	8.577	2.789	***
MO <sup>2</sup>	-0.197	0.072	-2.747	***
MO <sup>3</sup>	0.000	0.000	1.293	**
SEMI	-103.270	35.434	-2.914	*
SEMI <sup>2</sup>	7.058	2.343	3.013	*
SEMI <sup>3</sup>	0.093	0.051	1.821	*
EST	0.142	0.485	0.292	*
EST <sup>2</sup>	0.000	0.000	-0.183	*
EST <sup>3</sup>	0.000	0.000	-2.314	**

Relevancia estadística a los niveles de: (\*) 10%, (\*\*)5% y (\*\*\*)1%, significancia.  
 $R^2=0.98$        $F= 1337$

Los demás coeficientes o parámetros no son significativos; de manera global parece ser significativo la probabilidad del  $F$ -Snedecor es cero, por lo tanto, se genera controversia entre las  $t$  y  $F$  estadísticos; por otro lado existen escasos estudios que hayan utilizado el modelo de función de producción cúbica en la optimización productiva; sin embargo se encontró el trabajo de (Portillo *et al.*, 2015) quien aplicó la función cúbica para optimizar la producción del maíz, solo con una variable independiente el nitrógeno ( $N$ ), no hay combinación con otros insumos, al igual que en el modelo cuadrática ésta es también investigación de tipo experimental, con datos panel; refiere que el modelo de función de producción cúbica se ajusta a los pequeños agricultores y la de Cobb Douglas debe ser aplicado en la producción a gran escala, cuya producción se destina a la comercialización; al respecto tengo mi discrepancia, porque la función de producción cúbica es una función clásica, muy sencilla con una sola variable explicativa, no permite analizar el proceso de combinación de factores productivos para obtener un nivel de producto, la actividad agrícola por más orgánica que ésta sea, su producción requiere la combinación de varios insumos o factores productivos, por lo tanto no es adecuado aplicar en la optimización del proceso productivo de la quinua orgánica.



La tabla, muestra la función de producción Cobb Douglas, es un modelo linealizado log-log, cuyos parámetros de las variables capital ( $KT$ ), mano de obra ( $MO$ ) y tierra ( $T$ ), presentan signo positivo, tienen relación directa con el nivel de producción (Tabla 4).

**Tabla 4.** Estimación de los parámetros estadísticos, de la función de producción Cobb-Douglas, de quinua orgánica, Puno, 2015-2016.

Variable	Coefficiente	Error estandar	t	
C	5.2187	0.445	11.715	
LKT	0.2441	0.039	6.309	***
LMO	0.3235	0.104	3.097	***
LT	0.5322	0.115	4.636	***

Relevancia estadística a los niveles de: (\*\*\*)1% de significancia.

$$R^2 = 94\% \quad F=1276 \quad d= 1.67$$

Este resultado es lo esperado en concordancia con la teoría microeconómica de función de producción, los coeficientes o parámetros del modelo representan la elasticidad individual de cada factor, por ejemplo si el factor tierra aumenta en 10% entonces el producto aumentaría en 5.3%; por otro lado la suma de los parámetros es la elasticidad global de la función de producción este indicador es del 1.09 para el modelo escogido; estadísticamente los parámetros de manera individual son significativos a un nivel de significancia del 1%; el coeficiente de determinación es del 0.94, significa que el 94% de la variabilidad del volumen de producción de la quinua orgánica está influenciada por las variaciones de los factores productivos capital, mano de obra y tierra, manteniendo los demás variables fijas, con un estadístico de Durbin-Watson del 1.67, este último indica que el modelo presenta problema de autocorrelación. Por lo tanto, para especificar adecuadamente el modelo escogido, se realiza las pruebas de multicolinealidad, heterocedasticidad y autocorrelación.

La multicolinealidad ocurre cuando se presenta  $t$  estadístico bajo, la bondad de ajuste  $R^2$  elevado, podría ser superior al 0.9, el estadístico  $F$  es significativo (Gujarati y Porter, 2010), la regla práctica de *Klein*, afirma que la multicolinealidad puede ser un problema complicado solamente si la  $R^2$  obtenida de una regresión auxiliar es mayor que la  $R^2$  global. Luego la regresión auxiliar que se ha realizado es:  $LKT = -1.665 + 0.887 * LMO$ , cuya bondad de ajuste es menor ( $R^2=75.5\%$ ) al ( $R^2$  global 94%); según la regla de *Klein* podemos decir que el modelo no presenta problemas de multicolinealidad entre sus variables explicativas, además (Gujarati y Porter, 2010) definen que el problema de multicolinealidad se reduce cuando la función de regresión es polinómica, la función de producción Cobb Douglas que hemos elegido para el presente trabajo de investigación es de tipo no lineal. La prueba de heteroscedastidad, es una característica que puede presentar el término de perturbación estocástica de un modelo econométrico y que implica que sus varianzas no son iguales para todas las observaciones, se realiza el test de *White*, regresionando como variable dependiente  $RESID^2$  y como variables independientes los logaritmos al cuadrado de: capital  $(LnKT)^2$ , mano de obra  $(LnMO)^2$  y el factor tierra  $(LnT)^2$ . Se plantea las hipótesis: hipótesis nula  $H_0=$ No hay heterocedasticidad, y la hipótesis alterna  $H_1=$ Existe heterocedasticidad, utilizando el estadístico  $F$  con 5% de nivel de significancia el valor crítico de la tabla distribución es ( $F=2.63$ ), contrastando con lo estimado, test de *White*  $F=3.39$ , cae en la región de rechazo de la hipótesis nula, entonces hay presencia de heterocedasticidad. Para corregir este problema, se realiza con el método robusto de la heteroscedastidad mediante el método de *White*; donde la variable dependiente es logaritmo del producto ( $LQ$ ) y las variables independientes son el





logaritmo natural de los insumos ( $LKT$ ,  $LMO$  y  $LT$ ). Test de autocorrelación, generalmente es un problema relacionado a los datos de series de tiempo, en el tipo de información de corte transversal se llama autocorrelación espacial, esto significa que los shocks de una determinada región de donde se toma la información pudrían afectar a otras (Castro y Rivas, 2010). se plantea las hipótesis:  $H_0$ : No hay autocorrelación positiva ni autocorrelación negativa, y la  $H_1$ : Existe autocorrelación positiva y negativa. Con nivel de significancia del 1%, el  $d=1.67$  calculado cae en la zona de indecisión, por lo tanto, rechazamos la hipótesis nula, aceptamos que existe la sospecha de autocorrelación positiva. Para descartar el problema de autocorrelación, aplicando el test de Breusch-Godfrey, en donde  $RESID$  está en función de variables independientes tales como logaritmos de: capital ( $LKT$ ), mano de obra ( $LMO$ ) y factor tierra ( $LT$ ) y los rezagos 1 y 2, el  $R^2$  es 0.043043, lo que implica que los residuos no están correlacionados; con nivel de significancia del 1%, con tres variables explicativas, y  $n=237$ , verificado en la tabla del estadístico  $DW$ : límite inferior  $dL=1.67$  y límite superior  $dU=1.7$ , el valor del estadístico  $d$  es del 2.009, por lo tanto, podemos concluir que se ha corregido el problema de autocorrelación.

Por lo tanto, la función de producción que mejor optimiza la productividad de la quinua orgánica es la de Cobb-Douglas, este hallazgo se ha confirmado con diferentes trabajos de investigación dentro de la actividad agropecuaria, se tiene el trabajo de (Mounirou y Balogoun, 2016) quien estudió la producción de soya en la comunidad de Savé-Benín-África Occidental, mencionan que el productor combina los factores de producción: semilla, fertilizante, insecticida, mano de obra, capital y área sembrada para obtener un nivel de producto; indicando que este modelo conduce a la eficiencia a los productores de la soya, lo cual tiene concordancia con la presente investigación. Asimismo se ha encontrado una investigación sobre el proceso productivo de “tarwi” en el Norte de Bolivia (Chipana *et al.*, 2014) aplicaron la función de producción Cobb-Douglas, utilizando cuatro factores productivos: tierra, semilla, maquinaria y mano de obra; como resultado fue que los parámetros de los factores tierra y maquinaria presentan signo negativo, lo cual significa productividad marginal negativo, es decir, ello implicaría que incrementos porcentuales de dichos factores lleva a que el volumen de producción disminuya; no estoy de acuerdo con esta relación inversa de los dos factores, porque según la teoría clásica de función de producción, la empresa debe producir en la etapa II, donde el producto marginal del insumo es decreciente pero positivo. En la misma línea de investigación (Ramírez, 2013) analizó la eficiencia técnica, distributiva y económica de la producción de arroz en la región central de Colombia, utilizando la función de producción Cobb-Douglas, concluye que los productores en base a dicho modelo pueden incrementar la productividad, reducir los costos y aumentar los beneficios; estoy de acuerdo con esta afirmación de igual forma refuerza el resultado del presente trabajo de investigación en lo concerniente a la aplicación del modelo Cobb-Douglas, que optimiza la productividad de la quinua orgánica. Asimismo (Clavijo y Ardila, 2015) en su trabajo sobre la eficiencia técnica y económica en la producción del cacao en Colombia, para determinar la productividad utilizaron la función de producción Cobb-Douglas, analizando la tecnología con la combinación de variables independientes: mano de obra familiar, mano de obra contratada y los fertilizantes; considero que es relevante la aplicación del modelo, porque permitió el análisis con dos o más insumos variables; este modelo encontró la posibilidad de mejorar la eficiencia técnica y económica de la producción del cacao y el uso de los recursos productivos para el agricultor promedio.

La función de producción de quinua orgánica presenta elasticidad de sustitución de factores, positivo. Los factores de producción capital y la mano de obra, son sustitutos:

Ecuación de elasticidad de sustitución de *Hernderson y Quant*:





$$e_s = \frac{\frac{1645134.75MO + 16515603.69KT}{MO^{1.0295}KT^{1.2677}}}{\frac{277473683.4}{MO^{1.0295}KT^{1.2677}}} = 1.0001$$

Lo cual implica que, ante variaciones del precio relativo de los insumos, es posible la sustitución de factores manteniendo el mismo nivel de producción (en la misma isocuanta).

La elasticidad global de la función de producción indica la capacidad de respuesta del producto ante cambios en el conjunto de insumos, esto depende del valor de elasticidad total, si es mayor, menor o igual a uno, puede ocurrir rendimientos crecientes, decrecientes o rendimientos constantes a escala, respectivamente. Dada la función Cobb-Douglas escogido:

$$Q = e^{5.21874}KT^{0.2441}MO^{0.32353}T^{0.5322}$$

La elasticidad global es:  $0.2441+0.32353+0.5322= 1.09$ , lo que implica que la producción de quinua orgánica en la Región Puno, en el largo plazo presenta rendimientos constantes a escala, es decir, aumento proporcional en los insumos el volumen de producción aumentaría en la misma proporción. Al respecto (Debertin, 2012) refiere que las funciones de producción agrícola del tipo Cobb Douglas generalmente presentan coeficiente (elasticidad global) de producción menor a uno, entonces tendrían rendimientos decrecientes a escala, por otro lado (Varian, 2010) indica que es posible que una tecnología tenga rendimientos constantes de escala y que cada uno de los factores tenga un producto marginal decreciente, afirma además que este es el más frecuente. Sin embargo, en el estudio sobre la tecnología de producción del algodón realizado por (Cortázar y Montaña, 2011) encontraron la función de producción Cobb Douglas, con elasticidad global mayor a uno, lo cual significaría rendimientos crecientes a escala en la tecnología de producción del algodón, dicho resultado probablemente es adecuado para dicho producto, debido que su proceso productivo y factor climatológico (naturaleza) es diferente a la de quinua orgánica. En el mismo contexto, en una investigación sobre la productividad del “tarwi” en el Norte de Bolivia por (Chipana *et al.*, 2014) utilizaron la función de producción Cobb Douglas, encontrando que la elasticidad global del modelo fue 0.78 e indican que la función de producción para el tarwi tiene rendimientos crecientes a escala; se discrepa con dicha afirmación, debido que la teoría microeconómica de economías de escala con el modelo Cobb Douglas, refiere que si la elasticidad global de la función es menor a 1 entonces se trata de rendimientos decrecientes a escala. En el estudio sobre la eficiencia técnica del arroz en Colombia (Ramírez, 2013) también utilizó la función de producción Cobb-Douglas, obteniendo elasticidad global del modelo 0.994 cifra que se redondea a 1, por lo tanto, afirman que la función de producción para el arroz presenta rendimientos constantes a escala, existe concordancia con este resultado, da sostenibilidad a los encontrados en el presente trabajo, además se apoya en la teoría de rendimientos a escala con el modelo Cobb Douglas.

Se ha determinado el nivel de óptimo económico, en este caso utilizando el modelo de función de producción para dos insumos variables, a través del método de optimización de Lagrange, para lo cual se ha formulado la ecuación de costo total (isocosto) de producción de quinua orgánica en una hectárea de cultivo, teniendo en cuenta que el costo de mano de obra es del  $w = S/ 34.00$  Soles el jornal y el costo del capital es  $r = S/ 57.00$  Soles/horas máquina; estos valores corresponden al promedio del mercado de factores, bajo el supuesto de competencia perfecta en el área rural donde se ha realizado el estudio. En la metodología de Lagrange se toma en cuenta la función de producción elegida y estimada, que viene a ser la isocuanta del modelo:



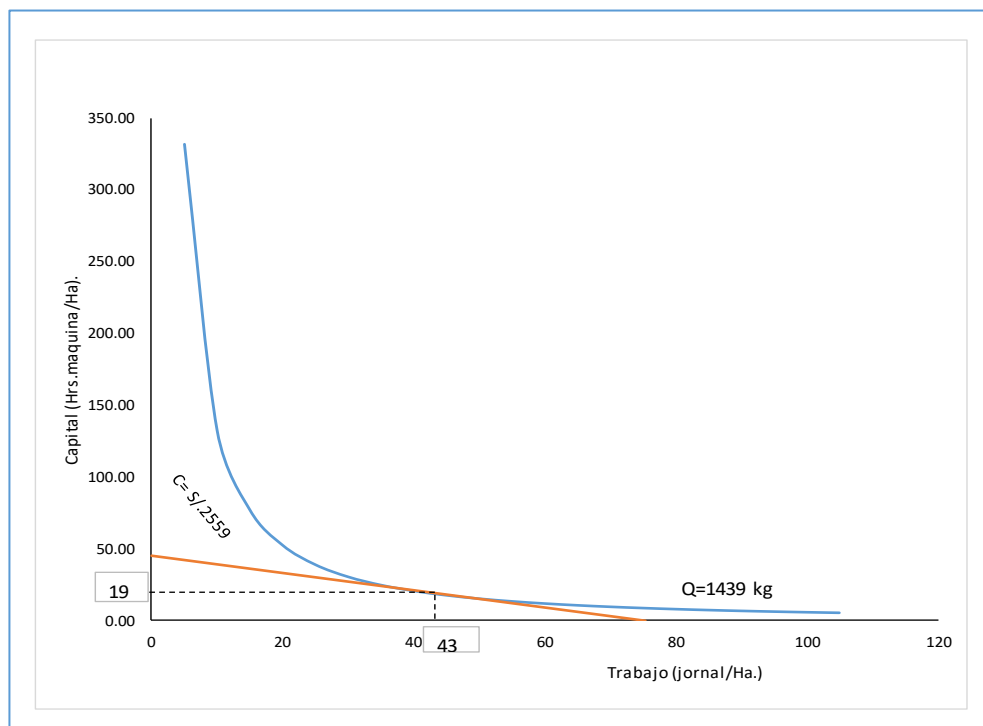
$$Q = 184.7KT^{0.2441}MO^{0.32353}T^{0.5322} \text{ Función de producción}$$

Con esta función de producción se ha calculado la cantidad de producto total de la quinua orgánica:  
 $Q = 184.7 * (9.5764)^{0.2441}(72.544)^{0.3235}(1.2424)^{0.5322} = 1438.96$ , kilos de producto por hectárea cultivada, para lo cual se ha reemplazado en cada variable con el valor del promedio de las cantidades de cada factor productivo:  $\overline{KT} = 9.5764$ , es del factor capital horas maquina por hectárea de cultivo,  $\overline{MO} = 72.544$ , es del factor trabajo en jornales por hectárea de cultivo, y  $\overline{T} = 1.2424$  del factor tierra. Luego se ha formulado el lagrangeano de optimización de la producción (minimización de costos):

$$L = 34MO + 57KT - \lambda(207.32KT^{0.2441}MO^{0.3235} - 1438.96)$$

En el enfoque de función de producción de largo plazo todos los factores son variables: capital, mano de obra, materia prima, entre otros, como refiere (Varian, 2010) en el largo plazo pueden alterarse todos los factores de producción, el agricultor podría comprar más tierras o vender una parte de lo que tiene, es decir, puede ajustar la cantidad del factor tierra con el fin de maximizar sus beneficios; entonces se ha analizado los rendimientos de la producción de la quinua orgánica bajo la teoría de producción de largo plazo, en la cual los factores mano de obra ( $MO$ ) y la maquinaria ( $KT$ ), ambos son variables; se ha aplicado la teoría de isocuantas y los isocostas, con la metodología de Lagrange de optimización de la función de producción (minimización de costos). La figura 1, muestra la optimización de la producción, el punto de equilibrio del productor de quinua orgánica, donde la pendiente de la curva de isocosto es igual a la pendiente de la curva de la isocuanta, en ese punto la producción óptima es  $Q = 1439$  kilos por hectárea cultivada, con un costo total de S/ 2 559 representado por la recta de isocosto. Analizando matemáticamente el punto en la que se maximiza los beneficios corresponde a la siguiente regla (Varian, 2010).

**Figura 1.** Equilibrio del productor de quinua orgánica, con dos insumos variables que lleva a la maximización de beneficios, Puno, 2015-2016.



Se muestra el proceso productivo de la quinua orgánica que es intensivo en mano de obra, la elasticidad de la producción del factor mano de obra es mayor al del capital, si se incrementa en 10% la mano de obra, la producción aumenta en 3.2%, en cambio sí se incrementa en la misma proporción el uso de maquinaria el producto aumenta en 2.4%. En este contexto, en el trabajo de investigación sobre la eficiencia técnica, distributiva y económica del arroz en Colombia por (Ramírez, 2013) encontró resultado similar al presente trabajo, donde el empleo de la mano de obra (elasticidad = 0.24) es mayor al uso del recurso maquinaria agrícola (elasticidad = 0.08), coincido con este resultado, ello implicaría que el cultivo del arroz es también intensivo en mano de obra. Asimismo, en el trabajo de la productividad de “tarwi” en Bolivia (Chipana *et al.*, 2014) hallaron que el empleo del factor mano de obra (elasticidad = 0.02) es mayor y positivo en comparación del uso de la maquinaria agrícola (elasticidad = -0.02), es negativo; de igual forma esto significa que la producción de este grano es intensiva en mano de obra; estos resultados confirman los hallazgos en la productividad de la quinua orgánica.

A partir de la minimización de costos, se ha optimizado la productividad de la quinua orgánica, luego se ha estimado los ingresos con un precio de S/ 4.90 soles en el mercado de la quinua orgánica, luego restando los costos totales se ha calculado los beneficios totales por una hectárea cultivada, en la región Puno: Beneficios = Ingreso - costos, luego tenemos que la ecuación de costo es:

$$CT = w * MO + r * KT = 34 * 42.9 + 57 * 19.3 = S/ 2 559.00 \text{ Soles, y de los ingresos: } I = P * Q = 4.90 * 1439 = S/ 7051 \text{ Soles; entonces los beneficios serán por suma de S/ 4 492.00.}$$

Esto nos muestra que el agricultor de quinua orgánica, obtiene beneficios económicos por un monto de S/ 4 492.00, por cada hectárea de cultivo, en una campaña agrícola si el pequeño agricultor que tiene un cuarto de hectárea, los beneficios serán proporcionales; la función de Cobb Douglas y el procedimiento de Lagrange, optimiza mejor la productividad de la quinua orgánica, contribuye a optimizar el proceso productivo, además para adoptar una mejor decisión en el empleo de los factores productivos.

Los tipos de agricultores según tenencia de tierra para el cultivo de quinua orgánica en el ámbito de la investigación son: de los 237 productores muestreadas 214 agricultores (el 90%) se encuentran dentro del tipo de pequeños agricultores con menos de 3 hectáreas de cultivo, 23 agricultores, (que es el 10%) son medianos agricultores con tierras de cultivo para la quinua orgánica entre 3 a 10 hectáreas; finalmente no se ha encontrado grandes agricultores, es decir, ningún productor de quinua orgánica posee más de 10 hectáreas.

## CONCLUSIONES

La función de producción que mejor optimiza la productividad de la quinua orgánica es la de Cobb-Douglas, los factores de producción que influyen positivamente en el nivel de producto son la mano de obra (*MO*), capital (*KT*), tierra (*T*), a un nivel de significancia del 1% cuyas probabilidades son cercano a cero. Los modelos cuadrática y cúbica existen en escasa cantidad solo en investigaciones agropecuarias de tipo experimental; de igual forma el modelo lineal multivariable es mínimo en su aplicación.

La función de producción de quinua orgánica en la Región Puno presenta un valor de elasticidad de sustitución entre factores del 1.0001, esto implica que los factores de producción capital (*KT*) y mano de obra (*MO*) son insumos sustitutorios, lo cual significa que ante variaciones del precio relativo de los mismos se puede sustituir un insumo por el otro y mantenerse en el mismo nivel de producción. La

producción de quinua orgánica en la Región Puno, en el largo plazo, presenta rendimientos constantes a escala, el indicador es 1.09 redondeando es igual a la unidad, esto implica que un aumento proporcional en los insumos o factores productivos, el nivel de producto aumentaría en la misma proporción.

El nivel óptimo económico, es decir, el nivel de producción obtenida y vendida es de 1439 kilos por hectárea de cultivo de quinua orgánica, lo cual permite maximizar los beneficios del productor, utilizando una combinación de factores productivos: maquinaria agrícola ( $KT=19.3$  horas/maquina/ha) y factor mano de obra ( $MO= 42.9$  jornales por hectárea), manteniendo fijos los demás factores; obtiene beneficios económicos por un monto de S/ 4 492.00 Soles, por hectárea cultivada, en una campaña agrícola.

## AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional del Altiplano, a la Escuela de Post Grado, por permitirme haber realizado mis estudios de Doctorado en Economía y Políticas Públicas.

Al Dr. Edson Apaza Mamani, por haberme guiado de manera permanente y oportuna a través de su acertado asesoramiento, con sus conocimientos teóricos y prácticos en el presente trabajo de investigación, hasta concretizar el grado de Doctor, bastante anhelado.

A todos los Docentes del Programa de Doctorado en Economía, de las diferentes asignaturas que supieron ilustrarnos sus sabios conocimientos en diversos temas de la ciencia económica, investigación y métodos cuantitativos.

A los directivos de la Cooperativa de productores quinua orgánica de COOPAIN- Cabana, quienes brindaron facilidades y permitieron aplicar el instrumento de recopilación de información primaria, in situ.

A los agricultores de quinua orgánica del distrito de Capachica, de igual forma a los productores de Ilave, quienes pacientemente brindaron información sobre el proceso de cultivo de la quinua orgánica.

## LITERATURA CITADA

- Castellanos-Pérez, M., Martínez-Garza, Á., Beatriz-Colmenares, C., Martínez-Damián, Á. y Rendón-Sánchez, G. (2006). Región confidencial para el óptimo económico de una función de producción Cobb-Douglas. *Agrociencia*, 40(1), 117–124.
- Chipana, G., Trigo, R., Bosque, H., Jacobsen, S., Mercado, G., Callisaya, I. y Condori, J. (2014). Los factores productivos y la educación en la producción de tarwi en el altiplano norte de bolivia. *SciELO*, 42–48.
- Clavijo, A. y Ardila, A. (2015). *Eficiencia Económico en la Producción de Cacao*. Universidad Santo Tomás, Bucaramanga.
- Cortázar, A. y Montaña, E. (2011). Aplicación a factores definidos e interpretación específica de resultados, (9).
- Debertin, L. (2012). *Agricultural Production Economics SECOND EDITION*. (P. Education, Ed.) (Second Edi). Lexington.
- Eguiguren, B. (2009). *Estimación de una demanda de energía para el sector Industrial de Chile, y sus elasticidades de sustitución*. PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE.
- McFadden, R. y Miranowski, A. (2016). Climate change: Challenge and opportunity to maintain sustainable productivity growth and environment in a corn-soybean bioeconomy. *AgBioForum*, 19(2), 92–111.
- Mounirou, I. y Balogoun, I. (2016). Estimation of stochastic frontier of the technical efficiency of the soybeans production ' s determinants in Benin : the case of the commune of Savé. *Full Length Research Paper*, 4(4), 410–420.
- Nicholson, W. y Snyder, C. (2011). *Microeconomía intermedia y su aplicación*. (Cengage Learning, Ed.) (11 Edición). México D.F.
- Pindyck, S. y Rubinfeld, L. (2013). *Microeconomía*. (S. . Pearson Educacio, Ed.) (Octava). Mdrid.
- Ramírez-Suárez, A. (2013). Análisis de eficiencia económica de fincas arroceras : una aplicación de una función



- determinística de ingresos brutos frontera. *Lebret*, 5, 213–240.
- Rebollar, S., Callejas, N. y Guzman, E. (2018). La función Cobb-Douglas de la producción semintensiva de leche en el sur del Estado de México. *Análisis Económico*, XXXIII.
- Reyes, J. (2008). Determinación de una Función de Producción en Maíz (*Zea mays*) a partir de Nitrógeno Fósforo y Potasio, 39.
- Rosales, R., Apaza, E. y Bonilla, A. (2004). Economía de la producción de bienes agrícolas. Teoría y aplicaciones. *Documento CEDE. Universidad de Los Andes. Colombia.*, 34, 2–64.
- Salvatore, D. (2009). *Microeconomía Schaum*.
- Toro, P., García, A., Aguilar, C., Acero, R., Perea, J. y Vera, R. (2010). Modelos Econométricos Para El Desarrollo De Funciones De Producción. *Documentos de Trabajo Producción Animal y Gestión*, 1, 3–54.
- Varian, R. (2010). *Microeconomía intermedia*. (A. E. S. Boch, Ed.). Barcelona.

